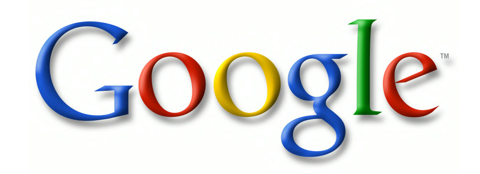


Kroster W. Bu... 1874.

Neue
Curvenlehre.

Grundzüge
einer
Umgestaltung der höheren Geometrie
durch
ihre ursprüngliche analytische Methode.

Von

Adolf Peters,

Doctor der Philosophie, ordentl. Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig und Lehrer der Mathematik am Blochmann-Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden.

Mit 4 Steindrucktafeln.

Dresden,
in der Walther'schen Hofbuchhandlung.
1835.

W. W. Beman
gt.
6-12-1923

Vorrede.

Indem die folgenden Blätter des Verfassers Entdeckung der ursprünglichen analytischen Methode der höheren Geometrie mittheilen, die Nothwendigkeit dieser Methode zeigen und die Vortheile ihres Gebrauches bei verschiedenen wesentlichen Untersuchungen an einer Folge von Curven nachweisen, können sie sich nur als Keim einer künftigen grösseren Entfaltung geben. Diese ist indeß überhaupt nicht Sache eines Mannes; sie fordert den Verein vieler und verschiedenartiger Kräfte. Die Bedeutung, die die vorliegende Schrift haben kann, muß deshalb grösserntheils in ihrer Wirkung und deren Folgen gesucht werden. Für jetzt sind die neue allgemeine Methode der Untersuchung selbst, die Ermittelung und Darstellung einiger neuen einfachen Curven, ein erleichtertes Verfahren, die Wendungspunkte und Rückkehrpunkte aufzufinden, die Selbstausmessung der krummen

Linien, eine kürzere und bequemere Methode, das Gesetz der Krümmungsveränderung und den Krümmungskreis, so wie die Punkte der größten und kleinsten Krümmung zu bestimmen, der ursprüngliche Begriff der Aehnlichkeit der Curven und seine Anwendung, die Idee einer Theorie der Metamorphose der Gestalt, die Erörterung der Bedingungen über die Zuwendung der convexen oder concaven Seite, eine neue Methode der Rectification rc., so wie die Erforschung des Complexes der absoluten Eigenschaften mehrerer alten und neuen Curven nach dieser Weise, die materiellen Vortheile, die diese Arbeit der Wissenschaft bieten kann. Das formelle Bestreben des Buches fließt aus dem Bedürfnisse, jede Willkührlichkeit im Gange wissenschaftlicher Entwickelung zu verbannen. Demzufolge ist die Classificationsfrage von neuem näher erwogen und darauf eine Sonderung der Curven-Eigenschaften in zwei Hauptklassen vorgenommen; es ist auf Ordnung, Zusammenhang und relative Vollständigkeit bei der Ableitung der verschiedenen einzelnen Eigenschaften innerhalb jeder Klasse gedrungen und dieser Grundsatz in der ersten durchgeführt. Ferner sind die Coordinaten-Methode und die ihr zur Seite gestellte neue als nothwendige und wesentliche dargestellt, es ist ihre Beziehung zu den Principien gezeigt, dadurch jeder das Gebiet ihrer Thätigkeit angewiesen und

das bisherige analytisch-geometrische Verfahren aus einem höheren Gesichtspunkte übersehen. Hierdurch fließt auch dieser durch lange Zeiten als vortrefflich bewährten Methode noch ein Gewinn zu: man wird sich bewußt, wo ihre Kraft, wo dagegen ihre Schwäche liegt, und warum es so ist; woraus eine Handhabung derselben in einem veränderten Geiste hervorgehen mag. Endlich werden die Grundzüge des nothwendigen Organismus der höheren Geometrie angedeutet und die höhere Einheit der alten und neuen Methode (in den Schlußbetrachtungen) nachgewiesen. — Der systematische Geist der Wissenschaft wird sich am Ende immer zu dem Punkte hingedrängt sehen, ihre großen Massen durch Ableitung und Nebeneinanderstellung der verschiedenen nothwendigen Methoden der Forschung und ihrer Mittheilung zu ordnen.

Was die Darstellung betrifft, so habe ich für meine Pflicht gehalten, die Untersuchungen möglichst zugänglich zu machen, und daher die leider jetzt häufige sogleich von oben herein fahrende höchste Allgemeinheit und gedrungenste Kürze, wenigstens in der Materie selbst, zu vermeiden. Ueberhaupt bin ich so lehrhaft als möglich zu Werke gegangen, habe hier und da einen ausführlicheren Entwickelungsgang dem kürzeren vorangehen lassen, es sind an einigen Orten zweckmäßige Einschal-

tungen gemacht ꝛc. Nach und nach den Gesichtskreis des Lernenden zu erweitern, ihn unvermerkt zu höheren Standpunkten zu erheben und plötzlich, noch ehe er seine höchste Kraft angestrengt zu haben glaubt, mit dem Blicke von dem Gipfel der Allgemeinheit zu überraschen: das ist die Kunst, der wir als Lehrer nachstreben sollen. An der durchgängigen Verfolgung dieses Strebens hinderten mich indeß verschiedene Umstände, von denen der hauptsächlichste weiter unten erwähnt ist.

Einige Worte über die Entstehung der mitgetheilten Forschungsweise mögen sich hier anschließen. Nicht ein kühner glücklicher Blick, sondern die einfache Anschauung von dem eigensten Wesen der Curve, die sich schon in den Jünglingsjahren bei der Beschäftigung mit den krummen Linien meiner Vorstellung aufdrang, veranlaßte die neue Auffassung. Ein innerstes Geistesbedürfniß, das mich später jahrelang quälte und reizte, und in den vorhandenen Methoden, ungeachtet mannigfacher Versuche, besonders mit der synthetischen, keine volle Befriedigung finden ließ, erhob diesen Grundgedanken mehr und mehr zur Klarheit, und forderte endlich gebieterisch seine Entwickelung. Wenn dieses Bedürfniß ein wahrhaft wissenschaftliches war, wie ich dieß in der Einleitung zu zeigen gesucht habe, so muß es einem ähnlichen in verwandten Geistern entgegenkommen

oder es wecken, dadurch eine ergiebige Quelle von Erkenntnissen werden und einen vortheilhaft veränderten Standpunkt der höheren Geometrie begründen. Die Zukunft wird daher über Werth oder Unwerth des angestellten Versuches unfehlbar und recht entscheiden.

Dessen ungeachtet sind die *öffentlichen Urtheile* bei dem ersten Erscheinen der Schrift keineswegs gleichgültig. Vermag auch die Kritik niemals das Unbedeutende und Nichtige dauernd zu heben, noch das Tüchtige und Reelle zu unterdrücken, so kann sie doch mehr oder weniger hemmend und lähmend oder fördernd und mitentwickelnd einwirken. Ich bin in dieser Rücksicht auf die abweichendsten Erfahrungen, auf günstige Aufnahme von der einen, auf heftige Angriffe von der andern Seite gefaßt, das Letztere schon deshalb, weil alles Neue, will es auch noch so gern bescheiden und anspruchlos auftreten, sich denn doch seiner Natur nach muß geltend machen wollen, und dadurch ein natürlicher Widerstand, besonders in Geistern von alter lieber Gewohnheit, hervorgerufen wird. Indeß bekenne ich gern, das allgemeine Mißtrauen, das sich in unsern Tagen gegen die öffentliche Kritik erhebt, im Allgemeinen nicht zu theilen. Ich denke mir überhaupt am liebsten den Urtheilenden von reinem Character, einsichtig, vorurtheilsfrei und unpartheiisch, von der Wissenschaft erwärmt

und nur in ihrem Interesse handelnd, das Gewordene kennend und liebend, das Werdende pflegend und schützend, nur das Irrige, Verfehlte und Schlechte zerstörend. Jedenfalls giebt sich eine gesunde Kritik, sei es in Lob oder Tadel, sogleich dadurch kund, daß sie vor allen Dingen den Standpunkt des Verfassers, die Bedeutung seiner Leistung, ihre Beziehung zu der Fortbildung oder Verbreitung der Wissenschaft, also Wesen und Kern der Sache auffaßt und würdigt, und darauf erst einzelne Eigenthümlichkeiten, Mängel und Fehler, Vorzüge und Tugenden als das bezeichnet, was sie im Verhältnisse zum Ganzen sind. Jeden in diesem Sinne wohlwollend ausgesprochenen begründeten Tadel, er betreffe das Ganze oder Einzelnes, jede Erweiterung, Verbesserung und Berichtigung von Männern, die mir an Einsicht und Umsicht überlegen sind, werde ich mit dem aufrichtigsten Danke erkennen. Denn alles dieses nutzt der Wissenschaft; nur die Begeisterung für sie schuf meine Arbeit.

Noch einflußreicher vielleicht als die öffentlichen Beurtheilungen sind im Stillen gehegte oder privatim ausgesprochene Ansichten gewiegter namhafter Männer der Wissenschaft, so wie aufstrebender junger Talente. So viel Gewicht indeß auch dem lauten und stillen Urtheile beigelegt werden muß, so ist doch im vorliegenden Falle eine thätige Theilnahme unläugbar das Wichtigste,

und das, worauf es zuletzt ankommt. Schon die ebenen Curven eröffnen der neuen Forschungsweise einen weiten Spielraum, wie unermeßlich ist erst das von dieser Methode noch unbebauete Feld der doppelt gekrümmten Linien und gebogenen Flächen! — Auf dem kaum betretenen Wege lassen sich überall die reichsten Lorbeern ernten, und es kommt nur darauf an, welche Geister die ersten sind, die tiefer eindringen. Möchte deshalb die neue Methode sich alsbald der thätigen Mitwirkung fähiger Männer erfreuen!

In dieser Hoffnung einer baldigen weiteren Behandlung und dadurch allgemeineren Verbreitung der neuen Methode bestärkt mich der günstige und an sich bedeutende Umstand, daß bereits ein zweiter, angesehener Forscher, K. Chr. Fr. Krause, einen Weg eingeschlagen hat, der, so weit ich aus der darüber mir bis jetzt nur zu Gesicht gekommenen Anzeige ersehen kann, auf demselben Grundgedanken beruht und meinem Verfahren mehr oder weniger ähnlich sein muß. Denn wenn zwei verschiedene Männer völlig unabhängig von einander verwandte wissenschaftliche Gedanken darstellen, so wird schon dadurch wahrscheinlich, daß ihr Hervortreten durch den Entwickelungsgang der Wissenschaft geboten und die Erscheinung zeitgemäß sei. Auch ist die eigenthümliche erste Erfassung desselben Gegenstandes von

zwei verschiedenen Seiten und die vielleicht sehr abweichende Behandlung des Stoffes günstig für dessen Durchbildung und regt zugleich zum Vergleichen, genaueren Prüfen und Durchdenken beider Erzeugnisse an.

Obgleich mir noch unbekannt ist, wie weit wir zusammenstimmen oder von einander abweichen, so theile ich doch gleich jetzt, um jede Ungewißheit über die Unabhängigkeit beider Arbeiten zu beseitigen, unter Beifügung der nöthigen brieflichen Anlagen nachstehende Notizen mit.

Als mir jene Anzeige gleich nach ihrem Erscheinen in die Hände kam, war ich mit meinen Untersuchungen schon vorgerückt und machte dem Hauptherausgeber des Krause'schen Nachlasses, Freiherrn Herrmann von Leonhardi, davon sogleich eine nähere Mittheilung, und ebenso später in den ersten Monaten d. J. Herrn Professor Heinrich Schröder in München, der die Herausgabe von Krause's nachgelassenen mathematischen Schriften übernommen und mit großer Liebe und Aufopferung zu besorgen angefangen hat. Ich schrieb Herrn Professor Schröder:

„— — Der Grundgedanke beider Methoden ist „nach jener Anzeige, die dem im September vorigen „Jahres erschienenen ersten Bande der Religionsphiloso„phie beigegeben wurde und wodurch ich die erste Kunde „von Krause's Princip und Verfahren erhielt, offenbar „derselbe. Ob meine Entwickelung dieses Gedankens in „den Grundzügen mit Krause übereinstimmt, kann ich

„nach jener Anzeige nicht sicher entscheiden. Ich gab „Leonhardi, wie Sie wissen werden, sogleich nach ihrem „Erscheinen Nachricht von meinen Arbeiten; nach dem „mir darauf von diesem vortrefflichen Manne in seiner ge„wohnten freundschaftlichen Weise mitgetheilten Andeutungen „scheint meine Art der Untersuchung von der „Krause'schen verschieden zu sein; ganz klar ist nur, daß „der wissenschaftliche Gang abweicht, und dieser Umstand „wird zur schnelleren Verbreitung der Methode beitragen. „Ich verspreche mir Großes von Krause's Arbeit, und „würde die meinige nicht unternommen haben, wenn ich „bei dem ersten glücklichen Schritte, den ich that, von „der Identität unserer Entdeckungen unterrichtet gewesen „wäre. Dann hätte ich die Herausgabe von Kraus'es „Untersuchungen abgewartet. Krause, dessen Verlust wir „nicht genug beklagen können, war unstreitig einer der „tiefsinnigsten und umfassendsten Philosophen aller Zeiten; „seine Forschungsweise ist, besonders wo er sie auf „formale Stoffe anwendet, bewunderungswürdig und „höchst eigenthümlich, und ihre Idealität kann unserer „Zeit nicht genug empfohlen werden."

„Eben so unabhängig Krause's Forschungen von „den meinigen sind, sind es diese von jenen; beide „werden den Stempel der Ursprünglichkeit an der Stirn „tragen. Der Umstand, daß zwei Verschiedene unab„hängig von einander dieselbe oder doch die ähnliche „Entdeckung machten, bezeugt das Zeitgemäße derselben „in der Fortbewegung der Wissenschaft, und veranlaßt „hoffentlich schnellere Beachtung und ernstere Prüfung „der neuen Standpunkte. Daß übrigens Krause seine „Entdeckungen früher gemacht hat als ich, unterliegt kei„nem Zweifel. Krause ruhte schon länger als ein Jahr „im Grabe, als ich den ersten Buchstaben meiner Ar-

„beit schrieb. Zu dieser Zeit, im December 1833 beschäftigte ich mich mit dem Versuche, die synthetische „Methode der Alten systematisch zu begründen, durch „Mitanwendung der Rechnung zu erweitern und ihr „Gebiet in's Unendliche auszudehnen. Ich construirte „und berechnete neue Curven nach dieser Methode u. s. w. „Aber immer wieder drängte sich das Gefühl ihrer Unzulänglichkeit, das Bewußtsein von der Relativität dieser „so wie der Coordinaten-Methode und damit das Bedürfniß einer sachgemäßeren Behandlung hervor. Schon „Jahre lang hatte ich den Grundgedanken hierzu deutlich aber unfruchtbar mit mir herumgetragen; jetzt „fühlte ich mich angespornt, diesen alten Curven-Gedanken wieder hervorzuziehen, und ihn hartnäckiger, als „es schon einmal früher geschehen war, zu verfolgen. „Es gelang, und ich theilte einem mathematisch-philosophischen Freunde, Karl Snell, *) die erste gelungene Entwickelung mit. Er war einverstanden damit und feuerte mich zur Fortsetzung an; ein vorgerückter damaliger Schüler, Leonard Collmann aus London, zeichnete unter meiner Leitung die neuen Linien, „während ich fortarbeitete. Später, nach ¾ Juhren, erfuhr ich plötzlich, daß die neue Curven-Methode, womit Krause in den letzten Jahren seines Lebens beschäftigt war, mit der meinigen verwandt oder dieselbe „sei. Weder in mündlichen noch schriftlichen Mittheilungen hatte Krause jemals ein Wort über das Wesen „seines Princips oder seiner Methode gegen mich geäußert; auch ist mir in dem, was ich von Krause's „Schriften gelesen, keine Andeutung dieser Art zu Gesicht gekommen, obgleich, wie Leonhardi schreibt, Krause

*) Lehrer der Mathematik an hiesiger Kreuzschule.

„schon viel früher (1802) hierher gehörige Winke und „Elemente druckschriftlich mitgetheilt hat, die daher we„nig bekannt geworden sein müssen oder doch nicht ge„hörig beachtet worden sind. Ich war daher sehr über„rascht, theils schmerzlich, weil ich mich für den ersten „und einzigen Entdecker hielt, theils angenehm, indem „ich einerseits von einem Andern der Methode dieselbe „hohe Bedeutung beigelegt sah und dieser Andere Krause „war, andererseits der Wissenschaft, der ich mit begei„sterter Neigung anhange, desto mehr Vorschub gelei„stet wird."

„Krause's mathematischer Nachlaß enthält, wie mir „Leonhardi in ausführlicher Angabe der Gegenstände der „Forschung mitgetheilt hat, noch viele Reichthümer, die „mich äußerst schätzbar dünken. Doch bin ich am be„gierigsten auf die Erscheinung der besprochenen Schrift, „um sie sogleich nach erfolgtem Drucke der meinigen „(die unter dem Titel: Neue Curvenlehre, diesen Som„mer herauskommt) mit dieser vergleichen zu können. „Möchten wir zum Besten der Wissenschaft bald durch„dringen! Eine mächtige Wirkung und zwar auf die „ganze Mathematik kann nicht ausbleiben, geschehe sie „nun früher oder später; um dieses zu sehen bedarf es „keines Propheten-Blickes. — — —"

Hierauf antwortete Herr Prof. Schröder, den ich bei dieser Gelegenheit als einen sehr wackern Mann kennen lernte, unter anderm;

„— — Wirkliche Freude machte mir ihre gütige „Mittheilung, daß Sie bereits seit einem Jahre mit der „Ausarbeitung einer neuen Curvenlehre beschäftiget seyen,

„deren allgemeines Princip dasselbe ursprüngliche, aus „dem Begriffe der krummen Linie selbst hervorgehende „ist, welches auch Krause entdeckt, in mehreren hinter„lassenen Handschriften ausführlich entwickelt, und zur „vollständigen wissenschaftlichen Entfaltung des gan„zen Organismus der krummen Linien bis auf gewisse Tiefe „durchgeführt hat. Ein ganz neues, wesentliches „Element der Geometrie, die Wissenschaft von der in„nern Wesenheit der krummen Linien selbst, unab„hängig von ihren äußeren Beziehungen zu andern ge„raden und krummen Linien im Raume, hat an Ihnen „somit zur selben Zeit, zu welcher sie zuerst an's Licht „tritt, schon einen Mitarbeiter gewonnen; und dieß be„stärkt mich in der zuversichtlichen Hoffnung, daß dieser „grundwichtige Theil der Geometrie nicht lange unbe„rücksichtiget bleiben werde."

„Allein eine Bitte kann ich nicht unterdrücken, und „diese besteht darin, daß Sie um der Wissenschaft wil„len auf Ihr unbestreitbares Recht, die neuen Curven, „die Sie entdeckt und bearbeitet haben, zu benennen, „freiwillig verzichten; Krause hat sie bereits systematisch „benannt, und seine Arbeit kann nach seinem Tode in „dieser Hinsicht keine Aenderung mehr erfahren; Sie aber „können durch ein Opfer, das Sie der Wissenschaft ge„wiß zu bringen bereit seyn werden, die unangenehme „Verwirrung verhüten, welche gleichzeitig an's Licht tre„tende verschiedene Benennungen einer und derselben „Sache unvermeidlich verursachen würden. Ich bitte sie „deshalb herzlich der Wissenschaft dieß Opfer zu bringen."

Später, vor etwa acht Wochen, als die Krause'sche Schrift eben im Drucke fertig geworden war und ver-

sendet werden sollte, ich aber den Herausgeber kurz vorher schriftlich gebeten hatte, mir das Werk noch nicht zu schicken, da ich gerade mit dem Abschlusse des meinigen, das jetzt gedruckt werden solle, beschäftigt sei, und deshalb nicht Zeit habe, jenes zu lesen, geschweige denn in dem meinigen mich noch darauf zu beziehen, auch bei meinem seitherigen Bemühen wohl wünschen dürfe, daß mir die volle Integrität meiner Arbeit erhalten werde, erwiederte Herr Prof. Schröder:

„Ihr Wunsch, daß den ersten Anfängen Ihrer „Forschungen der Stempel der Unabhängigkeit und Ei„genthümlichkeit erhalten werde, in dessen Erfüllung ich „für die Wissenschaft Vortheile sehe, läßt mich mein „Verlangen unterdrücken, Ihnen jetzt nähere und be„stimmtere Mittheilungen über Krause's Arbeiten, und „über den so eben gedruckten ersten Band derselben zu „machen, welchen Fleischmann in München in Commis„sion hat, und welcher den Titel führt: Novae theoriae „linearum curvarum originariae et vere scientificae „specimina quinque prima. Auctore Carolo Chris„tiano Friederico Krause. Edidit: Professor H. „Schröder. Monachii anno MDCCCXXXV. Sump„tibus editoris.“

„Ich beschränke mich übrigens darauf, Ihnen über „die Geschichte von Krause's Arbeit über die Curven „folgende kurze Mittheilung zu machen, welche ich Sie, „bei der Hinweisung auf Krause's Arbeit in Ihrer „Vorrede, daselbst mit aufzunehmen ersuche.“

„Die Anfänge der neuen Curvenlehre, welche in „den obengenannten quinque speciminibus entfaltet sind,

„wurden aus einem größeren Werke entnommen, wel„ches Krause im letzten Jahrzehnt seines Lebens aus„gearbeitet hat. Das Princip selbst wurde schon im „Jahre 1799 von ihm entdeckt, und er hat die auf „dasselbe gegründete Theorie des Kreises, welche das „zweite Specimen des in Frage stehenden ersten Ban„des enthält, schon vor mehr als 30 Jahren ausgear„beitet, und in seinen Vorlesungen über reine Mathe„matik, die er in den Jahren 1802—1804 an der „Universität zu Jena hielt, seinen Schülern mitgetheilt. „Krause hat diese Theorie des Kreises auch druckschrift„lich in seiner Dissertation: de philosophiae et mathe„seos notione earumque intima conjunctione (Jenae „1802), und an andern Orten erwähnt, und über die „ursprüngliche Methode, die krummen Linien wissen„schaftlich zu entfalten, in seinem Werke: Anleitung zur „Naturphilosophie Jena 1804, p. 127 u. s. f. einiges „Allgemeine mitgetheilt. Vom Jahre 1802 angefan„gen, hat derselbe die Theorie der Curven von einfa„cher und doppelter Krümmung nach und nach geome„trisch und analytisch handschriftlich entwickelt, und end„lich in den letzten zehn Jahren seines Lebens die The„orie und Construction der Linien, welche nach der ur„sprünglichen Betrachtung vom ersten und zweiten alge„braischen Grade sind, und ebenso der Linien von ein„facher Krümmung, welche von trigonometrischen und „logarithmischen Functionen abhängen, vollendet. Unter „die trigonometrischen Linien von sehr einfachen Func„tionen gehören auch die Kegelschnitte. — —“

„Ich habe in meiner Vorrede Ihrer Arbeit mit fol„genden Worten gedacht: Quum in hoc libello in lu„cem emittendo versabar, pergratum mihi fuit com„perire, alium Geometram, Dr. Peters Dresdensem,

„virum reverendissimum, in nova theoria curvarum iisdem principiis originariis, quibus sequentia haec specimina nituntur, superstruenda jam per aliquod tempus operam collocare. Cum enim Dr. Peters identitatem principii ex conspectu hujus libri, qui alii operi philosophico auctoris jam anno praeterito additus erat, cognovisset, primo quidem illius operis editorem, Hermannum de Leonhardi, amicum meum, de hac re per litteras adiit, postea vero mihi ipsi hanc epistolam scripsit, quam huc inserendam curavi; ceterum lectores commonitos velim, Dr. Peters auctoris nostri manu scripta nunquam inspexisse, et quod ego sciam, nec ab auctore ipso nec ab alio quoquam novi hujus theoriae curvarum principii ullam notionem antea accepisse. Hier folgt wörtlich Ihr Brief in deutscher Sprache.“ *)

Was jene Bitte anlangt, so versteht es sich von selbst, daß mir die Pietät gegen den ehrwürdigen Verstorbenen, den ich als tiefen und gelehrten Forscher hochschätzte und selbst als Freund liebte (ich erfreute mich vor zehn Jahren zu Göttingen eine Zeit lang seines persönlichen Umganges) vorschrieb, die von mir entworfenen Namen neuer Curven wieder zurückzunehmen. Nur ein einziger für jenes Benennungssystem keinesfalls hinderlicher ist, zu meinem Andenken etwa, zurückgelassen. Auch die Namen der nach der neuen Methode gebildeten Be-

*) Es ist der oben zuerst mitgetheilte.

„wurden aus einem größeren Werke entnommen, wel„ches Krause im letzten Jahrzehnt seines Lebens aus„gearbeitet hat. Das Princip selbst wurde schon im „Jahre 1799 von ihm entdeckt, und er hat die auf „dasselbe gegründete Theorie des **Kreises**, welche das „zweite Specimen des in Frage stehenden ersten Ban„des enthält, schon vor mehr als 30 Jahren ausgear„beitet, und in seinen Vorlesungen über reine Mathe„matik, die er in den Jahren 1802—1804 an der „Universität zu Jena hielt, seinen Schülern mitgetheilt. „Krause hat diese Theorie des Kreises auch druckschrift„lich in seiner Dissertation: **de philosophiae et mathe„seos notione earumque intima conjunctione (Jenae „1802)**, und an andern Orten erwähnt, und über die „ursprüngliche Methode, die krummen Linien wissen„schaftlich zu entfalten, in seinem Werke: Anleitung zur „Naturphilosophie Jena 1804, p. 127 u. s. f. einiges „Allgemeine mitgetheilt. Vom Jahre 1802 angefan„gen, hat derselbe die Theorie der Curven von einfa„cher und doppelter Krümmung nach und nach geome„trisch und analytisch handschriftlich entwickelt, und end„lich in den letzten zehn Jahren seines Lebens die The„orie und Construction der Linien, welche nach der ur„sprünglichen Betrachtung vom ersten und zweiten alge„braischen Grade sind, und ebenso der Linien von ein„facher Krümmung, welche von trigonometrischen und „logarithmischen Functionen abhängen, vollendet. Unter „die trigonometrischen Linien von sehr einfachen Func„tionen gehören auch die Kegelschnitte. — —"

„Ich habe in meiner Vorrede Ihrer Arbeit mit fol„genden Worten gedacht: **Quum in hoc libello in lu„cem emittendo versabar, pergratum mihi fuit com„perire, alium Geometram, Dr. Peters Dresdensem,**

„virum reverendissimum, in nova theoria curvarum „iisdem principiis originariis, quibus sequentia haec „specimina nituntur, superstruenda jam per aliquod „tempus operam collocare. Cum enim Dr. Peters „identitatem principii ex conspectu hujus libri, qui „alii operi philosophico auctoris jam anno praete„rito additus erat, cognovisset, primo quidem illius „operis editorem, Hermannum de Leonhardi, amicum „meum, de hac re per litteras adiit, postea vero „mihi ipsi hanc epistolam scripsit, quam huc inse„rendam curavi; ceterum lectores commonitos ve„lim, Dr. Peters auctoris nostri manu scripta nun„quam inspexisse, et quod ego sciam, nec ab auc„tore ipso nec ab alio quoquam novi hujus theo„riae curvarum principii ullam notionem antea acce„pisse. Hier folgt wörtlich Ihr Brief in deutscher „Sprache." *)

Was jene Bitte anlangt, so versteht es sich von selbst, daß mir die Pietät gegen den ehrwürdigen Verstorbenen, den ich als tiefen und gelehrten Forscher hochschätzte und selbst als Freund liebte (ich erfreute mich vor zehn Jahren zu Göttingen eine Zeit lang seines persönlichen Umganges) vorschrieb, die von mir entworfenen Namen neuer Curven wieder zurückzunehmen. Nur ein einziger für jenes Benennungssystem keinesfalls hinderlicher ist, zu meinem Andenken etwa, zurückgelassen. Auch die Namen der nach der neuen Methode gebildeten Be-

*) Es ist der oben zuerst mitgetheilte.

kannten alten Curven, den Kreis ausgenommen, sind nicht ausdrücklich genannt. Sogar einen Theil der schon gezeichneten neuen krummen Linien selbst habe ich zurückbehalten und nur einige mitgetheilt, theils auch deshalb, weil mir bei den wenigen bedrängten Mußestunden, die ich dieser Arbeit widmen konnte, nicht Zeit zu ihrer gehörigen Bearbeitung blieb. Ueberhaupt sind manche noch unvollendete Forschungen weggelassen, und es hat meine Mittheilung bei weitem nicht die Abrundung, relative Vollständigkeit und Vollendung erhalten, die ich ihr früher zugedacht hatte, weil es wichtig war, daß sie möglichst zugleich mit der Krause'schen in Wirkung trat, und ich mich deshalb zu beeilen hatte. So z. B. mußte die Theorie der Selbstbedeckung, Schneidung ꝛc. und die Ableitung der Polar-Gleichung aus der ursprünglichen und umgekehrt, weil sie noch nicht vollendet waren, wegbleiben. Sollte diese Schrift das freilich unwahrscheinliche Glück haben, eine zweite Auflage zu erleben, so würde ich nicht nur für diese Ergänzungen Sorge tragen, sondern auch andere zum Theil schon vorbereitete Untersuchungen hinzufügen, diesen und jenen Uebelstand heben, Vieles sorgfältiger ausarbeiten und besser ordnen, manchem Gegenstande einen mehr angemessenen Platz anweisen und besonders die Betrachtungen weiter ausdehnen und eine größere Menge zum Theil neuer Formen

in Frage ziehen. Auch sollte Sorgfalt darauf verwendet werden, daß das Buch durchgreifend den Character eines Lehrbuches erhielte, was jetzt nicht ganz der Fall sein konnte, da der Vortrag von der anderen Seite den Character einer ersten Darstellung festhalten und an manchen Stellen sogar polemisch auftreten mußte. Selbst für die Vorbeugung möglicher Mißverständnisse hätte ich hier und da gern etwas gethan (woran die Kürze der Zeit mich hinderte), z. B. die Grundverschiedenheit der Polar-Coordinaten-Methode und der ursprünglichen näher beleuchtet; beide sind so gänzlich heterogen, daß die erstere nicht einmal Veranlassung zu der Entstehung der letzteren gegeben hat. Hierher gehörte auch noch eine Gegeneinanderstellung der rein geometrischen und der statischen und dynamischen Methoden der analytischen Geometrie. Letztere sind ebenfalls äußerst wichtig, und wenn auch secundärer, doch in gewissem Sinne höherer Natur, als die rein geometrischen Methoden, die in der mitgetheilten einen neuen Zuwachs erhalten, und deren vollständiges System in diesen Blättern vorbereitet ist.

Das Studium der Forschungen Krause's wird übrigens, aller Vermuthung nach, Keiner entbehren können, der der gegenwärtigen Schrift seine Theilnahme geschenkt hat. Sie enthalten höchst wahrscheinlich einen bedeutenden

Schatz wichtiger Mittheilungen, und ich muss erwarten, in wie weit wir zusammengetroffen sind.

Schliesslich entledige ich mich noch der Pflicht, Herrn stud. architect. Collmann, jetzt in München, Herrn stud. jur. Stelzner, jetzt in Leipzig, und Herrn Kohl, Lehrer der Mathematik hierselbst, öffentlich meinen Dank für die bereitwillige Güte zu sagen, mit der sie die auf den Tafeln III und IV verzeichneten krummen Linien (so wie andere hier nicht mit dargestellte) bildeten, und zu diesem Zwecke unter meiner Leitung vorher sorgfältig berechneten.

Möge denn der neue Sprössling der Wissenschaft glücklich gedeihen und der Gegenwart wie der Zukunft reiche Früchte tragen!

Dresden, im August 1835.

Adolf Peters.

Inhalt.

Vierter Abschnitt: Allgemeine Methoden zur Ableitung absoluter Eigenschaften der ebenen Curven.

Fünfter Abschnitt: Bestimmung der absoluten Eigenschaften einzelner Curven.

Sechster Abschnitt: Ableitung von relativen Eigenschaften ebener Curven.

Neue Curvenlehre.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Werth und Nothwendigkeit der höheren Wissenschaftlichkeit.

Die Mathematik nähert sich seit dem Ablaufe des vorigen Jahrhunderts mehr und mehr einem wichtigen Entwickelungspunkte, dem Uebergange zur Stufe der höheren Wissenschaftlichkeit. Damit der streng begriffliche Inhalt dieser Ansicht hervortrete, sind scharfe Bezeichnungen nothwendig.

Mathematische Wissenschaftlichkeit im gewöhnlichen Sinne besteht in strenger Bewahrheitung der einzelnen Lehren, in einer solchen Aneinanderreihung derselben, daß sich die folgenden durch die vorhergehenden begründen lassen, und da-

her alle eine logisch fest geschlossene Kette bilden. Dieses kann zwar nicht geschehen ohne Zurückbeziehung auf letzte Grundsätze: diese selbst aber werden nur so weit, als sie sich hinterher unentbehrlich zeigen, nur vereinzelt und gleichsam aus Noth hingestellt, wie es z. B. bei Euklides in die Augen fällt. An einem die Wissenschaft wahrhaft gestaltenden, sie zum Denk-Organismus mit innerlich nothwendiger Gliederung umschaffenden Principe wird es mangeln, und dieser Mangel durch einen künstlichen Bau, durch willkührliche Methoden, durch ein nach äußerlichen oder doch weniger wesentlichen Unterscheidungsmerkmalen gebildetes Fachwerk ersetzt werden.

Diese Weise wissenschaftlicher Thätigkeit findet nothwendig da Statt, wo gewonnenes Material zum ersten Male in einen Zusammenhang gebracht werden soll, überhaupt allenthalben, wo sich neuer Stoff der Wissenschaft in großen imposanten Massen hervordrängt; wo eine Fülle von Wahrheiten ganz neuer, überraschender und bedeutungsvoller Art entspringt. Hiermit übereinstimmig zeigt die Geschichte, daß nicht allein die Mathesis der Alten, sondern auch die glänzende Mathematik des 17. und 18. Jahrhunderts dieser Sphäre angehört.

Die Griechen arbeiteten den Gehalt der niederen, die Modernen den der höheren Mathematik zuerst heraus; dort wurden zuerst die Sätze der Elementar-Geometrie und Arithmetik zu wissenschaftlicher Wahrheit gestempelt, und hier trat die Analysis, besonders die höhere, mit Alles überwältigenden Kräften, mit so reichen Entwickelungen hervor, daß wohl nirgends an mehr als an streng logische Verknüpfung im gewöhnlichen Sinne zu denken war. Beide Perioden fallen also in eine Haupt-Epoche, da sie das entschiedene Vorwalten des Gehaltes über die höhere wissenschaftliche Form mit einander gemein haben.

Daß es in einer von beiden Perioden anders hätte gewesen seyn können, ist undenkbar.

Es mußte den griechischen Geometern überall nur darum zu thun sein, die Sätze so zu ordnen, daß jeder einzelne streng bewiesen werden konnte, es handelte sich lediglich um die Unerschütterlichkeit der Beweisführungen, um die Feststellung der Wahrheiten, um die Existenz des Stoffes oder Gehaltes der Wissenschaft. Die Sätze selbst, besonders die bedeutendsten, denen die andern nur zu dienen scheinen, waren allzu überraschend und interessant, um

nicht die ganze Aufmerksamkeit und Thätigkeit hinwegzunehmen. Freilich aber mußte eine Gestaltung dieses Stoffes, eine Verknüpfung der Sätze zu einem Ganzen, eine Form Statt finden, aber diese konnte ihres angegebenen beschränkten Zweckes wegen nichts weiter sein, als die strengste Bündigkeit im Einzelnen und Ganzen; und gerade darin besteht ihre relative, von den Neueren unerreichte Vortrefflichkeit. Sie war mit großem Scharfsinn ersonnen, sie war lediglich Weg zu dem eigentlichen Ziele, den bewiesenen Sätzen selbst. Daß der bloße Beweis zu einer eigentlichen Entwickelung des Zusammenhanges der Bedingungen unter sich und mit den Principien, zum Theil vermöge der nothwendigen Stellung im Organismus des Ganzen zu potenziren sei, und die daraus hervorgehende Bewahrheitung als solche gar nicht die alleinige wesentliche Absicht der Entwickelung ausmache, daß das System der Wahrheiten mehr als eine kunstvolle Aneinanderkettung derselben sein müsse, daß es auf die Nothwendigkeit der Form eben so sehr als auf die Nothwendigkeit des dargestellten Inhaltes ankomme, mußte den griechischen Meistern fern liegen. Form und Inhalt konnten sich nicht in schöner

Freiheit durchdringen, der letztere war das Bestimmende, die erstere nur eine gewissenhafte Dienerin desselben. In diesem Uebergewichte des Inhaltes über die Form, wie es sich wohl am passendsten bezeichnen läßt, besteht das Wesen der mathematischen Wissenschaftlichkeit im gewöhnlichen Sinne oder der niederen Wissenschaftlichkeit. Aber dieser Charakter wurde bei den Griechen so rein, vollendet und herrlich ausgebildet, daß die Werke, die ihn tragen, als unübertreffliche Muster ihrer Gattung dastehn.

War die Kindheit der mathematischen Wissenschaft in Griechenland in dieser Begrenzung so schön, der Feier und des Preises, die ihr in vollem Maaße zu Theil geworden, vollkommen würdig, so strahlte ihr Jünglingsalter in noch höherem Glanze. Die drei großen Meister des Alterthumes, Euklides, Archimedes und Apollonius stehen wieder auf und erwecken einen Zug verwandter Genien, der wie im Triumphe durch die beiden abgelaufenen Jahrhunderte schreitet, und dem sich noch im gegenwärtigen ebenbürtige Genossen, Männer wie Gauß, Monge u. a., anschließen. Sie entdecken eine neue Welt des Geistes, und beginnen mit ihren Schätzen eine unendliche Schöpfung. Fast das ganze Gebiet der theoretischen Mathematik, sammt dem der Astronomie

und Physik wird erobert, die Thätigkeit ist so groß und der Gewinn so unermeßlich, daß es der abstractesten Wissenschaft gelingt, die Aufmerksamkeit und Theilnahme der ganzen gebildeten Menschheit zu erregen und zu fesseln. — Wie hätte es anders sein können, als daß bei der ersten raschen Entwickelung eines so großen kaum geahnten Gehaltes der Wissenschaft dieses Material selbst, die wichtigen Resultate der Untersuchungen das Hauptaugenmerk blieben, und Alle immerfort auf die Gewinnung der möglichst größten Menge neuer Wahrheiten hinarbeiteten, gleichviel, auf welche Weise die Ableitungen geschehen mochten. Die Allgemeinheit und Kürze der Methoden war nächst ihrer Beweiskraft der alleinige Maaßstab ihrer Vortrefflichkeit, und wenn gleich diese Merkmale höchst wichtig sind, so dürfen sie doch keinesweges für die allein entscheidenden gelten. Vielmehr ist die entscheidende Frage für jede theoretische Methode, ob sie eine nothwendige, d. h. durch die Entfaltung des Wissenschaftbaues oder durch die Entwickelung der Grundideen der Wissenschaft gebotene sei; ist dieses, so ist sie standhaltig, denn alle übrige Tugenden der Methode sind nothwendig im Gefolge dieser Haupteigenschaft. — Es zeigt sich also, daß dieser

zum Theil noch jetzt fortdauernde Zeitabschnitt den Hauptcharacter, das Vorherrschen des Stoffes vor der Form, mit den Griechen theilt, nur daß das Allgemeinere der Untersuchungen, das Analytische der Methoden der Form mehr Freiheit gab, und die Strenge der alten Methode milderte. Aber dessen ungeachtet hing diese Form ganz allein vom Gehalte ab, lediglich auf diesen kam es an, und auf jene nur in so fern, als sie eine sichere und geschickte Geburtshelferin sein mußte. Derjenige Weg der Forschung und diejenige Anordnung des Erforschten waren die besten, wodurch die größte Summe bedeutender Wahrheiten auf das Bequemste dargestellt wurde. Wir finden also auch in dieser herrlichen Periode den Charakter der niederen Wissenschaftlichkeit wieder, und in beiden geschilderten Zeitabschnitten eine große Epoche, die des ersten Entdeckens der verschiedenartigen Hauptgebiete der Wissenschaft, gewissermaßen der Umschiffung ihrer Welt, der Orientirung in ihr, und der Gewinnung ihrer nächsten und werthvollsten Producte abgeschlossen. Abgeschlossen jedoch nur, in so fern man eine Epoche abgeschlossen nennen kann, deren eigenthümliche Thätigkeit in den folgenden Zeiträumen und vielleicht durch alle Zeiten fortgeht, nur daß ihr Geist nicht

mehr ausschliesslich waltet und nicht mehr die Herrschaft führt. Denn es ist die Eigenthümlichkeit jeder höheren Thätigkeit des wissenschaftlichen Lebens, daß sie die niederen in sich aufnimmt, daß diese innerhalb des weitern Kreises fortarbeitet, und weit entfernt, an Würde zu verlieren, daran gewinnt, nur daß es allein durch die Beziehung ihrer Ergebnisse auf die erwachte höhere Thätigkeit geschieht.

Wenn man nun gleich die Bemerkung richtig fände, daß selbst manche bedeutende Gelehrte der Mathematik kaum ein deutliches Bewußtsein von dem in gewisser Rücksicht Wichtigsten haben, was vorgeht, so läßt sich doch die immer größere Annäherung an die zweite Haupt-Epoche, die der höheren Wissenschaftlichkeit, in unseren Tagen nicht mehr verkennen. Leise, kaum merkbar, fing diese Bewegung an, sie ist jetzt in verschiedenen Theilen der Mathematik schon deutlich wahrnehmbar, in stetigem Wachsthume und immer größerer Ausbreitung begriffen und wird im Fortgange des Jahrhunderts mehr und mehr beschleunigt erscheinen.

Betrachtet man zuerst, um dieses näher zu erörtern, die Richtung der Zeit im Allgemeinen, so zeigt sich zwar, daß neuerdings die Welt mehr als

je verlangt, die Wissenschaft solle auf die Anwendung hinarbeiten. Die Forscher sollen sich um das Gold der Wissenschaft nur deßhalb bemühen, um es so schnell als möglich in Kupfermünze für das praktische Leben umzusetzen. Geschieht das nicht, so wird über leere Speculation, unnütze Grübelei u. dgl. geeifert. Glücklicherweise hat aber die Mathematik einen so kräftigen nach innen gehenden Lebenstrieb, daß ihre Pfleger jetzt wie immer, ohne jene Forderungen, wie weit sie billig sind, zu überhören, an den bedeutendsten theoretischen Speculationen unerschütterlich festhalten.

Forscht man dann weiter im Besondern nach, so zeigt sich dem wachen Auge die erfreuliche Erscheinung eines Strebens nach edlerer innerer Gestaltung der Wissenschaft. Verkündet nicht Alles seit langen Jahren ein Anfangs dunkel gewesenes, aber immer bewußter werdendes Ringen nach höherer Freiheit und Selbstständigkeit, größerer Tiefe und Vollendung der Mathematik? Sie hat angefangen, über den ausschließlichen methodischen Grundsatz bloß starrer Consequenz und hier und da selbst über den der Willkühr in der Auffassungs- und Behandlungsweise, den Methoden und Abstufungen sich zu erheben, sie macht sich mehr und mehr von der

Abhängigkeit los, vermöge welcher sie sich in ihren inneren Kreisen hauptsächlich nach Bedingungen und Anregungen der Erfahrungswissenschaften formte (wobei sie übrigens den Zufluß, den sie von dieser Seite fortwährend erhalten wird, keineswegs zu verschmähen hat), und wird eben dadurch eine desto stärkere und gewandtere Dienerin derselben. Nur daß sie auf ihrem eigenen Gebiete mehr und mehr jene ideale Würde anstrebt, die aller Wissenschaften geistiger Scepter und geweihete Krone ist. — Um ein einzelnes Beispiel anzuführen, woher rührt es, daß man in Frankreich und Deutschland, den beiden Ländern, in denen seit langer Zeit der Hauptsitz der Mathematik war, bald nach dem Ableben jener Heroen, unter denen Euler stralt, anfing, sich von dem Euklideischen Systeme der niedern Mathematik mit Entschlossenheit zu entfernen? Das Kopfschütteln und Lächeln, das ernste Abmahnen alter strenger Lehrer war umsonst. Mit Recht erinnerte noch Kästner in seiner gewohnten Weise, die Systeme seien um so schlechter, je weiter sie von Euklides abwichen; dennoch geschah es und mußte geschehen. Es war Uebergang zu einer höheren Stufe, wie kläglich auch der erste Anfang aussah, und wie weit man selbst noch heute von

dem ersehnten Ziele entfernt geblieben ist. Alle die verschiedenen Abweichungen von Euklides, die ganze Flut von Lehrbüchern der Elemente, unter denen mehrere bedeutende Leistungen sich finden, sind nichts Anderes, als ein besonnenes oder irres, mehr oder weniger glückliches Suchen nach dem natürlichen Systeme der niederen Mathematik, besonders der niederen Geometrie, da das ewig bewunderungswürdige künstliche des Euklides die Geister wenn auch fortwährend und mit Recht beschäftigt, doch nicht mehr befriedigt. Es erging hier ähnlich wie in der Botanik. Die Trefflichkeit des Linneischen Systemes vermochte auf die Dauer dem Drange nach wahrhaft naturgemäßer Anordnung und Anschauung der Pflanzenwelt nicht zu widerstehen. — Was weiter z. B. die höhere Geometrie betrifft, so ist das Bedürfniß einer kritischen Revision und vielleicht theilweisen Umbildung derselben, wenn auch wegen der verhältnißmäßigen Neuheit der Methode noch nicht durchgängig gefühlt, doch, wie es scheint, hier und da wahrgenommen. Die vorliegenden Blätter versuchen den ersten entschiedenen Schritt in dieser Sache zu thun und zeigen die Nothwendigkeit desselben im folgenden Paragraphen. — Aehnliche

Versuche oder Bedürfniße lassen sich auch für die übrigen Theile der Mathematik nachweisen.

Es wurde eben von einem natürlichen Systeme der Mathematik gesprochen. Ein solches System, der Natur des Geistes, seiner Thätigkeit und seinem Bedürfniße vollkommen gemäß, ist dasjenige, wonach die höhere Wissenschaftlichkeit strebt. Das Wesen der letzteren aber wurde schon oben gelegentlich angedeutet und in eine Gestaltung der Wissenschaft zu einem Denk-Organismus mit innerlich nothwendiger Gliederung, oder kürzer, in die Nothwendigkeit der Form gesetzt. Der dem letzteren Ausdrucke beigelegte Sinn ist durch wiederholte Erklärungen gewiß hinlänglich vor Mißverständniß gesichert; indeß wird doch eine ausführlichere Bezeichnung des Characters dieser Stufe des erkennenden Lebens die Realität und Wichtigkeit desselben noch mehr hervorheben und die bisher gemachten Betrachtungen in helleres Licht setzen.

Mathematische Wissenschaftlichkeit im höheren Sinne heischt alles das, was die niedere verlangt, mit gleicher Strenge; aber sie begnügt sich nicht mit diesen gemeinen Ansprüchen. Sie stellt die Forderung, aus den gehörig erforschten Principien

und ihren Beziehungen die Wissenschaft synthetisch (und daher in ihren Grundlagen vollständig) zu construiren, so daß alles Einzelne als Entwickelungsmoment der Idee der Wissenschaft und des behandelten Erkenntnißkreises erscheint, und daher weder eine ganze Methode noch ein besonderes Verfahren, weder eine ganze Abtheilung noch irgend ein Satz willkührlich aufgegriffen, hingestellt und benutzt sein kann, vielmehr die Bedeutung und Beziehung der Behandlungsarten, der Zusammenhang der Hauptglieder und aller einzelnen Wahrheiten mit der Grund-Idee, und daher Abhängigkeit und Verwandschaft sämmtlicher Massen, Theile und Theilchen klar hervortritt, der Gang der Entwickelung und ihr Stoff also die äußerste Durchschaulichkeit erhält. Nur in solcher Klarheit, Harmonie und gegenseitigen Durchdringung der Bestandtheile des Wissens kann der denkende Geist des Menschen Genüge und Ruhe finden; dann aber genießt der Schüler der Wissenschaft, wie er beseelt von Verlangen nach Erkenntniß von Stufe zu Stufe steigt, eine Freude, deren Hoheit nur bezeichnet wird, indem man sie das schönste Zeugniß für die Göttlichkeit der Wissenschaft nennt. Zu der weiteren Annäherung an dieses große Ziel mitzuwir-

ken muß aller Arbeitenden schönstes Streben, aller Strebenden Ruhm und Lohn sein.

Möchte aber hier und dort behauptet werden, es sei zu Anstrengungen, unmittelbar auf diesen Zweck gerichtet, noch nicht die Zeit da, und man sehe noch nicht genug Material vor sich, um an die Ausführung so großartiger Pläne im Ernst denken zu können, so muß darauf erwiedert werden, daß der freie Geist auf der forschenden Menschheit sich nicht bannen läßt und daß dies ein Glück ist: denn es darf mit den Versuchen zu wahrhaft wissentschaftlicher Gestaltung der Wissenschaft nicht gewartet werden, bis die ungeheuerste Summe nur äußerlich verbundener Kenntniße aufgehäuft da liegt; sonst entflöhe im unendlichen Mühen, in niedriger Gewohnheit der gestaltende Geist und mit ihm das Höchste und Beste. Wenn dagegen beide Richtungen der Forschung, die systematische und die unmittelbar auf Vermehrung des einzelnen Wissens ausgehende, also die Richtung in die Tiefe, und die in die Breite und Höhe sich begegnen, so arbeiten sie einander in die Hände, und unterstützen und fördern sich wechselweise. Dabei ist ein noch unerwähnter Vortheil des höheren wissenschaftlichen Standpunktes als höchst wichtig hervorzuheben.

Je bedeutender das Auge der Wissenschaft sich erhebt, desto mehr einzelne Gegenstände und aus desto verschiednern Gesichtspunkten wird er sie gewahr, desto sicherer und umfassender ist der Blick, desto mannigfaltiger sind die durch den nothwendigen Fortschritt der Entwickelung dargebotenen Beziehungen. Systematische Entwickelung rechter Art ist daher eine reiche Fundgrube neuer Entdeckungen, und oft solcher, die dem regellos und zufällig wirkenden Erfindungsgeiste entgehen. Wo diese Eigenschaft schöpferischer Originalität und Fruchtbarkeit fehlt, fehlt auch der Geist höherer Wissenschaflichkeit und ächter Systematik, und an seine Stelle ist ein leerer unfruchtbarer Schematismus und Formalismus, ein mattes, von allem speculativen Gehalt entblößtes Schattensystem getreten, das sich für ächt ausgiebt und dadurch der Wissenschaft großen Schaden zufügt. Nicht nur die tüchtigen practischen Köpfe, auch alle bedeutenderen theoretischen Geister wenden sich mit Widerwillen ab. Indeß erklärt das häufige Vorkommen dieses kleinlichen, beschränkten und zu wenig tief gehenden systematischen Strebens noch nicht hinlänglich die auffallende Erscheinung, daß gewöhnlich gerade die größesten mathematischen Talente

wenig für die eigentliche Wissenschaft in der Wissenschaft, für die ächt systematische Vollendung derselben zu wirken geneigt sind. Die folgenden beiden Bemerkungen nehmen vielleicht dieser Wahrnehmung ihr Befremdliches. Die erste: je mehr eigentlich mathematische Kraft ein Geist hat, desto mehr müssen ihn einzelne Probleme der Wissenschaft anziehen; wohin der Blick nur fällt, haftet er sogleich, dringt ein, und findet reichlichen, interessanten Stoff zur Forschung. Seine Thätigkeit wird gefesselt und an einzelnen Untersuchungen fortgeleitet. Die andere Bemerkung ist die, daß nicht immer mit großem mathematischen Vermögen sich philosophischer Geist verbindet. Dieser ist aber Jedem unentbehrlich, der irgend eine eigentliche Wissenschaft, sie sei, welche sie wolle, aus dem Grunde gestalten, oder auch nur als ein organisches Ganzes übersehen und in diesem Sinne vollkommen durchdringen will.

Wenn nun nach allem Gesagten Bedeutung und Unerläßlichkeit des bezeichneten Standpunktes anzuerkennen sind, so versteht es sich auch von selbst, daß jeder Beurtheiler des wissenschaftlichen Werthes einer Methode, besonders wenn sie, wie die Coordinaten-Methode, die Gesammtentwickelung, oder

das System eines Haupttheiles der Mathematik begründen und leiten will, sich auf diesen Stand-punkt stellen und mit diesem Maaßstabe seinen Gegenstand messen muß.

Zweites Kapitel.

Kritik der Coordinaten-Methode.

Beinahe zweihundert Jahre sind verflossen, seit Descartes durch seine Coordinaten-Methode den Grund zu dem großen Bau der analytischen Geometrie legte. Obgleich der Arbeit durch Leibnitz'ens und Newton's nicht genug zu feiernde Entdeckung der höheren Rechnung unerwartete reiche Mittel und Kräfte zugeführt wurden, so bedurfte es doch des ganzen erwähnten Zeitabschnittes, um nur die wichtigsten Massen zu gestalten und einen vollen Begriff von der Kraft der außerordentlichen Methode zu geben, mit der in Fruchtbarkeit und Ausdehnung nur die Differential- und Integral-Rechnung selbst möchte wetteifern können. Aber weit entfernt, sich auf den Raum zweier Jahrhunderte zu beschränken, lebt und wirkt diese

Methode noch heute fort und setzt beständig neue Früchte an. Unendlich wie ihre Herrschaft im Raume wird ihre Wirkung in der Zeit sein.

Alles dessen ungeachtet befriedigt sie das Bedürfniß des Geistes und der Wissenschaft nicht vollkommen, es haften ihr Mängel an, die wesentlich genug sind, um die Fortdauer ihrer Alleinherrschaft zu brechen. Diese Mängel beruhen sämmtlich auf ihrer Einseitigkeit, vermöge deren sie in gewisser Beziehung eine relative und zugleich willkührliche Methode ist, die also in dieser einen und zwar wesentlichen Rücksicht nicht ursprünglich verfährt, daher einen Theil ihrer Gegenstände nur mittelbar ergreift, und deren nothwendige Folge aus den Principien und der Entfaltung des wissenschaftlichen Organismus sich nicht nachweisen läßt, dieses jedoch ebenfalls nur in gewisser Beziehung verstanden. Diese beiden Mängel haben dann weiter zur unabwendbaren Folge gehabt eine künstliche Eintheilung der Curven und gebogenen Flächen, ein willkührliches und mangelhaftes, aus dem höheren Gesichtspunkte betrachtet, sehr gebrechliches Lehrgebäude der analytischen Geometrie, und uneigentliche Verfahrungsarten bei vielen einzelnen Untersuchungen. Auf die Gewichtigkeit sol-

cher Uebelstände hat das vorige Kapitel indirect hingewiesen, und gewiß können nur Befangenheit oder fehlender Sinn für das innerste und tiefste Wesen der Wissenschaft dieselben gering anschlagen. Ich gehe zur Auseinandersetzung der Gründe von denjenigen unter den eben gemachten Behauptungen über, aus denen die übrigen herfließen.

Jede Methode der Geometrie hängt von ihren ursprünglichen Mitteln, ihrem Grundbegriffe ab; der Gebrauch der letztern zur Ableitung der Eigenschaften der Raumgebilde folgt einem Wege, der wenigstens im Allgemeinen durch das Fundament vorherbestimmt ist. Denn die ursprüngliche Form des Gedankenganges muß bei jeder einzelnen Ableitung als Vehikel wiederkehren, sofern man sich desselben nicht etwa durch eine neue Vermittlung wieder entschlägt. Ist also der Grundbegriff, die Auffassung der geometrischen Größen, relativ, so muß es nothwendig die Methode überhaupt sein. Relativ nenne ich einen geometrischen Begriff, wenn er räumliche Bestimmungen (z. B. eine Linie, einen Winkel, eine Ebene, entweder im Allgemeinen oder näher bestimmt rc.) voraussetzt, die außer dem definirten Gebilde vorhanden sind, so daß dieses erst durch Beziehung auf ein Anderes gedacht wird.

Jeder relative geometrische Begriff wird also Bestandtheile enthalten, die dem definirten Objecte nicht angehören und zu seiner Definition nicht unbedingt nothwendig sind. Es gehören ihm aber nur diejenigen Bestandtheile an, die das Gebild als unablösliche innere Elemente aufnimmt. Der gewöhnliche Begriff der Kreislinie z. B. ist ungeachtet seiner Einfachheit ein blos relativer, er setzt eine räumliche Bestimmung (einen Punkt) außerhalb der definirten Linie, auf welchen alle Punkte derselben bezogen werden.

Die Bestimmung und Behandlung der krummen Linien und krummen Flächen nach der Coordinaten-Methode stellt sich nun sogleich als eine relative dar. Um bei dessen näherer Nachweisung nicht ermüdend weitläuftig zu werden, beziehe ich mich dabei, und im Nachfolgenden überhaupt, nur auf Coordinaten in der Ebene; jeder wird leicht selbst die gezogenen Resultate auf doppelt gekrümmte Linien und krumme Flächen übertragen.

Wir wählen bei der begrifflichen Bezeichnung der Coordinaten die genetische Definition, die Erzeugung durch Bewegung. Die letztere wird dabei bekanntlich als bloße innere Handlung des Vorstellungsvermögens gesetzt, ihre Geschwindigkeit bleibt

außer Frage. Wie alle geometrische Begriffe doppelt, nach den Grundbestimmungen des Seins und des Werdens, also entweder als Begriffe des Entstehens oder des Bestehens gegeben werden können, so ist dies auch hier möglich, und es ist an sich gleichgültig, welche von beiden Vorstellungsarten man wählt; die eine kann jedesmal leicht und ohne Weiteres in die andere umgesetzt werden.

Man gebraucht zwei Hauptarten von Coordinaten in der Ebene:

1) Auf einer Geraden (der Abscissenlinie), von einem beliebigen Punkte in ihr aus, bewegt sich eine zweite Gerade (die Ordinaten) unter beliebigem Winkel mit jener und parallel mit sich selbst fort, so, daß sie stets mit demselben Punkte die Abscissenlinie berührt. Sie verändert während dieser Bewegung stetig ihre Länge oder ihre Längen (falls sie in sich mehrere durch Punkte bezeichnete Theile enthielte) nach irgend einem durch eine Function zwischen denselben und der Größe ihres Weges (Abscisse) bestimmten Gesetze. Beide Endpunkte, und, wenn solche vorhanden, die Binnenpunkte der bewegten Geraden beschreiben ein Liniengebild, das, so wie

die Anzahl der beschreibenden Punkte, durch jene Function gegeben ist.

Die beiden Geraden, die Coordinaten, sind außer der definirten Linie gegebene räumliche Bestimmungen. Die erzeugte Linie erscheint lediglich als ein Produkt der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer äußerlicher Elemente, der Coordinaten. Wie man das Lehrgerüste aufstellt, um einen Brückenbogen darüber zu bilden, so baut man hier ein ideelles Gerüste, um die Punkte einer Krummen festzulegen. Die Elemente des Begriffes sind nicht in seinen Bestand selbst aufgenommen, sie bleiben außerhalb liegen, der Verstand sieht sich daher gleich Anfangs unbefriedigt und die Anschauung liegt mit dem Begriffe im Streite. Indem nämlich das innere oder äußere Auge den gebildeten Zug verfolgt oder die Hand ihm nachgeht, bleibt das Coordinatensystem von selbst ohne Beachtung, oder, begrifflich ausgedrückt, der Lauf der Linie in Bezug auf sich selbst folgt ebenfalls einem bestimmten aber ganz andern Gesetze, als das ist, nach welchem die Coordinaten sich ändern. Das Gesetz der Erscheinung oder Anschauung der Linie ist ein anderes, als das ihrer begrifflichen Bildung durch die Coordinaten. Völlige Deutlichkeit erlangt diese

Erklärung über die Anwesenheit zweier verschiedenen Gesetze in einer nach dem Coordinatensystem gebildeten Linie erst weiter unten, im zweiten Abschnitte.

2) Eine Gerade (die Ordinaten) dreht sich in der Ebene um einen ihrer Punkte ohne Ende. Ihre Bewegung hebt von einer gegebenen Lage an und sie verändert dabei stetig ihre Länge oder Längen. Die Abhängigkeit derselben von der Größe der gemachten Drehung (Abscisse) ist durch eine Function (Polargleichung) gegeben. Durch sie ist das Liniengebild bestimmt, das die Endpunkte und etwaigen Binnenpunkte der Geraden zeichnen.

Diese Art von Coordinaten zeigt sich in Rücksicht auf unsere Frage beim ersten Blicke wie die vorher untersuchten, es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung ihrer relativen Natur. Sie erscheinen in Rücksicht auf den gebildeten Zug als bloßer Apparat, und es gilt überhaupt von ihnen, was von jenen gesagt wurde.

Fragt man ferner nach Ableitung und Herkunft dieser Methode selbst, ihrer Beziehung zu den Principien, so fehlt die Antwort. Beide Arten von Coordinaten treten hervor, ohne von ihrem Ursprunge

und dessen Nothwendigkeit Rechenschaft zu geben, sie werden willkührlich aufgegriffen und als willkommene Helfer festgehalten. Wie sie geschichtlich zufällig entstanden sind, so stehen sie noch da. Descartes behandelte bekanntlich ein unbestimmtes geometrisches Problem analytisch, und fand als Auflösung einen krummlinigen Ort. Eine glückliche Verallgemeinerung leitete ihn dabei auf das Verfahren mit parallelen Ordinaten (Nr. 1), wodurch plötzlich die höhere Geometrie zu einem umfangreichen ins Unendliche strebenden Wissenschaftzweige erwuchs. *) Später drang sich die Schwierigkeit der Anwendung dieses Verfahrens auf gewisse Curvenclassen auf, und das Verfahren mit Ordinaten

*) Geometria a Renato Des Cartes op. atq. stud. Franc. a Schooten. Lugd. Batav. 1649. 4. besonders S. 15 — 17, 25 — 26 und weiter. — Bemerkenswerth ist, daß, da die Lösung des unbestimmten Problems selbst und die Art und Weise derselben das Hauptverdienst D's. ausmacht — denn die weiteren Schritte fanden sich leichter — daß, wollte ich bemerken, auf diese Weise ein enger, wenn auch äußerlicher Zusammenhang der Geometrie der Alten und Neuern Statt findet. Denn eben dieses Problem hatte sich schon Archimedes vorgelegt und vergebens zu lösen gesucht. Vermuthlich reizte gerade dieser Umstand den kühnen und stolzen Geist des Cartesius.

aus einem Punkte (Nr. 2) bot sich als Ergänzung dar.

Darf es bei dieser in einer wesentlichen Beziehung relativen und willkührlichen Beschaffenheit der methodischen Grundlage der analytischen Geometrie befremden, wenn das wissenschaftliche Verfahren in vielem Einzelnen, die Anordnung und der Aufbau des Ganzen an eigenthümlichen Mängeln leidet? Wenn manche an sich einfache Untersuchungen zusammengesetzt und schwierig geworden, über die Rangordnung der krummen Linien und gebogenen Flächen, ihre größere und geringere Einfachheit falsche Begriffe entstanden, selbst sehr einfache Curven, ja ganze Classen derselben verborgen geblieben sind, Wesen und Umfang anderer Geschlechter mangelhaft aufgefaßt ist, rc.? — Denn alles dieses ist theils bekannt, theils ergiebt es sich durch die Entwickelung der neuen Methode in den folgenden Abschnitten.

So wenig das Gesagte abzuläugnen ist, so scheinen doch Werth und Bedeutung der Coordinaten-Methode, der im Eingange dieses Kapitels ein bleibender hoher Rang zugeschrieben wurde, dadurch unbillig verkleinert zu werden. Und allerdings sprechen die erlebten ungeheuersten Erfolge derselben jedem wegwerfenden Urtheile Hohn. Wo liegt der Punkt,

der diesen Zwiespalt versöhnt, wie gewinnen wir der Methode ein gewichtiges wissenschaftliches Moment? — Die Beantwortung dieser Frage fällt sehr einfach aus.

Es ist nämlich die Coordinaten-Methode nur in Rücksicht auf die krumme Linie selbst, auf den Zug derselben, eine relative, in der andern wesentlichen Beziehung, in Beziehung auf die krummlinig-begrenzte Fläche der Ebene ist sie absolut. Nicht wie die Fläche begrenzt ist, wohl aber wie sie sich verbreitet bestimmt die Coordinaten-Methode auf absolutem Wege. Denn wie wird auf ursprüngliche Weise eine gesetzmäßige Fläche in der Ebene gebildet, ein bestimmt gestaltetes Stück derselben als Fläche durchlaufen und herausgehoben? Durch die Bewegung einer Geraden in derselben, die nicht der Richtung ihrer eignen Länge folgt. Nun giebt es zwei ursprüngliche Bewegungen, die fortschreitende und die drehende.

A) Schreitet in der Ebene eine Gerade auf einer andern Linie, am einfachsten einer ebenfalls geraden, mit Beibehaltung ihrer Länge oder auch mit Veränderung derselben nach einem bestimmten Gesetze dieser Veränderung, unter beliebigem Winkel parallel mit sich selbst fort, so wird auf

ursprüngliche Weise eine gesetzmäßige Fläche in der Ebene erzeugt.*)

B) Dreht sich in der Ebene eine Gerade um einen ihrer Endpunkte oder um einen Binnenpunkt

---

*) Man könnte hier einwerfen, die Bildung der geradlinigen Figuren und geradflächigen Körperformen der niederen Geometrie sei noch ursprünglicher und einfacher. Dabei würde übersehen, daß alle solche Gebilde keine eigentliche Gesetzmäßigkeit besitzen; nur ihre Bestandtheile, die gerade Linie und die Ebene, sind gesetzmäßige Bildungen, sie selbst aber aus ihnen nur zusammengesetzt, und zwar nach Ausdehnungs- und Lagen-Bestimmungen, deren jede einzelne vorläufig ganz willkührlich ist, die also ein Aggregat, eine Mannigfaltigkeit ohne gemeinschaftliche Beziehung und Abhängigkeit, d. h. ohne Einheit bilden. Nur wenn in einem geometrischen Gebilde dieselbe gegenseitige Abhängigkeit unter den Grund-Größen (die z. B. zwei Ausdehnungen nach verschiedenen Dimensionen, oder eine Ausdehnung und eine Richtungsveränderung rc. sein können) jedes beliebigen Theiles wie unter den Grund-Größen des Ganzen Statt findet, kann ihm eigentliche Gesetzmäßigkeit zugesprochen werden. — Will man indeß auch jene anderen Figuren und Formen lieber gesetzmäßig nennen, so ist dagegen nicht viel einzuwenden, sobald nur in der Sache selbst der erwähnte Unterschied gemacht wird. Man könnte sie dann mechanisch gesetzmäßige Bildungen nennen, die anderen dagegen organisch gesetzmäßige. Die letzteren sind im Texte durch „gesetzmäßig" schlechthin bezeichnet.

unter denselben Bedingungen der Beibehaltung ihrer Länge oder der Veränderung derselben nach einem bestimmten Gesetze, so entsteht auf die zweite ursprüngliche Weise eine gesetzmäßig gebildete Fläche in der Ebene.

Bei beiden Erzeugungsarten können durch die Function in den hervorgebrachten Flächen Binnengrenzen, d. h. jedesmal mehrere verschiedene zum Theil sich bedeckende Flächen entstehen.

Ich führe zuerst die einfachsten Beispiele zu beiden Erzeugungsarten an.

Giebt man der bewegten Geraden eine beständige Größe, so bilden sich die beiden ebenen Figuren, die in Rücksicht auf die erzeugte Fläche die einfachsten von allen sind, die durch fortschreitende und durch drehende Bewegung entstehen können: das Parallelogramm und der Kreis. Soll aber die bewegte Gerade nach dem einfachsten Gesetze (Gleichung des ersten Grades) sich verändern, so gestaltet sich durch die progressive Bewegung die Dreieckfläche (also eine noch einfachere Fläche, als die durch die allereinfachste drehende Bewegung hervorgebrachte), durch die rotirende die Fläche der archimedischen Spirale, die also nach dem Kreise die einfachste

durch drehende Bewegung einer Geraden darstellbare ist. Eine dritte durch Fortschritt erzeugte Fläche, nach dem Parallelogramm und dem Dreiecke die einfachste dieser Bildungsart, ist die Parabel, welche entsteht, indem man die eine Dimension (die Erstreckung in die Breite) nach den Quadratwurzeln der andern Dimension (der Längen-Erstreckung, Abscisse) zunehmen läßt. Die Anschauung der Flächenverbreitung trifft hier mit dem Gesetze ihrer Erzeugung, der Coordinaten-Function, vollkommen zusammen; die letztere ist der allgemeine Begriff, unter den ein jedes solches Gebild als besondere Vorstellung sich stellt. Dasselbe gilt für alle auf diese Weise gebildete ebene Figuren, doch immer nur, sofern man auf die Ausbreitung ihrer Fläche dabei sieht.

Indem so nach der ursprünglichen Erzeugung ebener Flächen die Frage war, und die beiden Grund-Arten dieser Bildung bestimmt wurden, stellten sich uns auf überraschende Weise die beiden Coordinaten-Methoden als die einfachsten Flächen-Methoden dar. Denn die flächenbildende Gerade fällt mit dem Begriffe der Ordinate, der Weg, den sie fortschreitend oder drehend gemacht hat, mit dem der Abscisse zusammen. Die Coordinaten sind in

Bezug auf die entstandene Fläche also nicht blosse Mittel, sondern im eigentlichen Sinne Elemente der Bildung und des Gebildes.

Zu gleicher Zeit verliert die Methode die Willkührlichkeit ihrer Entstehung, denn sie entspringt nothwendig mit der Vorstellung gesetzmäßiger Flächenbildung und der dazu nöthigen zwei Dimensionen. Ferner entstehen die beiden Hauptauffassungen der Methode (parallele Ordinaten und Ordinaten aus einem Punkte) aus dem nothwendigen und für die wissenschaftliche Entfaltung der Geometrie überhaupt so wichtigen Gegensatze der zwei verschiedenen Grund-Arten geometrischer Größen oder ihrer Erzeugung: der Ausdehnung (Fortschritt) und des Winkels oder der Lagenverschiedenheit (Drehung). So zeigt sich ihr naher Zusammenhang mit den Grund-Ideen der Geometrie, und überhaupt die wissenschaftliche Würde der Coordinaten-Methode, ohne daß man sich genöthigt sähe, sie erst aus den bedeutenden Erfolgen abzunehmen, ein Verfahren, aus dem niemals Licht und Einsicht, gewöhnlich aber Staunen und Befangenheit hervorgeht.

Darin nun, daß die Coordinaten-Methode in Beziehung auf die krumme Linie selbst eine relative

und willkührliche, in Beziehung auf die von der Linie begrenzte Fläche aber eine absolute und nothwendige Methode ist, liegt der Grund, weshalb die Quadraturen und überhaupt alle Untersuchungen, die Beziehung auf die umgrenzte Fläche, die Relation ihrer Dimensionen, Durchmesser und Axen, auf characteristische Punkte innerhalb derselben (z. B. Brennpunkte) u. s. w. haben, nach der Coordinaten-Methode so leicht und einfach ausgeführt werden, hingegen die Ableitungen, welche die Curve als bloße Linie betreffen, die Vergleichung der Längen beliebiger Bogen, die Messung der Krümmungsgrade, die Betrachtung der Gestalt und des Laufes der Linie in Bezug auf sich selbst, besonders rücksichtlich characteristischer Punkte in derselben (z. B. der Wendungspunkte, Rückkehrpunkte rc.), ferner eine umfassende, streng begriffliche und doch mit der Anschauung einstimmige Eintheilung der Curven, ein natürliches System der Entwickelung, nach eben dieser Methode unverhältnißmäßige Schwierigkeiten darbieten.

Ist durch das Vorhergehende einerseits das hohe Ansehen, das die Methode ihrer großen Brauchbarkeit wegen genießt und das sich immer gesteigert hat, auch vor der Kritik gerechtfertigt, so ist

zugleich andererseits ihre Einseitigkeit an den Tag gelegt. Indem sie vermöge derselben die Curve selbst und eben so die krumme Fläche an sich (nicht den von ihr begrenzten Körperraum) nur mittelbar beherrscht, drängt sich die Frage hervor: welche ist für die Curve als Linie und die gebogene Fläche als solche die absolute und daher in diesem Sinne vollkommen entsprechende Methode? Die Beantwortung dieser Frage giebt der zweite Abschnitt durch Enthüllung der neuen Methode. Diese leistet das für die Curve, was die Coordinaten=Methode für die von ihr umgränzte ebene Fläche thut, und wird künftig für die doppelt gekrümmten Linien und krummen Flächen dasselbe Geschäft übernehmen, das der Coordinaten=Methode für die Körperräume zu führen bleibt. Beide Methoden sind, isolirt genommen, gleich einseitig, daher einander nothwendige gegenseitige Ergänzungen und von gleichem wissenschaftlichen Werthe. Soll aber eine von ihnen die Grund=Methode sein, so ist es mehr als zweifelhaft, ob die Coordinaten=Methode diesen Rang wird behaupten können. Denn die Curve an sich ist ihrem Wesen nach vor der Fläche, man kann die Linie bilden, ohne dabei auf die Natur der mit entstehenden Fläche zu merken und überhaupt, ohne die

Idee einer gesetzmäßig begrenzten Fläche und ihrer Erzeugung schon entwickelt zu haben; kurz, die Linie ist elementarer als die Fläche, sie hat nur eine Dimension. Aehnliches gilt von den doppelt gebogenen Curven und den krummen Flächen; man kann die letzteren früher und besser ohne Hülfe des Gesetzes betrachten, nach dem die Körperräume entstehen, deren Grenzen sie sind.

Was aber die Anwendung betrifft, so wird für die astronomischen, physikalischen und optischen Wissenschaften die Coordinaten-Methode wahrscheinlich immer eine überwiegende Bedeutung behalten, da sie wohl auf die Mehrzahl der wichtigsten Fragen dieser Wissenschaften leichter und ungezwungener anwendbar ist, als die ursprüngliche Methode. Schon die Auffassung der krummen Linien in der Natur erfolgt gewöhnlich relativ, in den optischen Wissenschaften z. B. der durch Vorüberstralungen des Lichtes an Curven entstehenden neuen Curven (Projection), der durch Spiegelung erzeugten krummen Linien, u. s. w. Doch werden auch wieder viele Untersuchungen der angewandten Mathematik sich finden, die künftig einfacher und leichter durch die jüngere Schwester der Coordinaten-Methode, als bisher durch sie selbst, auszuführen sind.

Zweiter Abschnitt.

Ursprünglich-begriffliche Auffassung der gesetzmäßigen Raumgebilde.

Erstes Kapitel.

Entwickelung und allgemeine Bezeichnung des ursprünglichen Begriffes der ebenen Curve. Geometrische Bedeutung der Vorzeichen.

§. 1.

Unter allen Größen ist es der Raum allein, der eine eigenthümliche Behandlungsweise fordert;*) die übrigen finden sämmtlich in der allgemeinen Mathematik, wie man wohl am besten niedere und höhere Arithmetik, Combinationslehre, niedere und höhere Analysis, niedere und höhere Algebra mit einem Namen nennt, erschöpfende Betrachtung. Diesen Vorzug, eine eigene unermeßliche Sphäre der Wissenschaft zu bilden, verdankt die Geometrie

*) Des Raumes wegen theilt dann auch die Bewegung in der reinen Mechanik diese eigenthümliche Behandlungsart.

lediglich dem Besitze zweier in der Mehrheit der Dimensionen des Raumes begründeten gänzlich von einander verschiedenen Größen-Arten, auf deren Unterscheidung und Gegenüberstellung es schon bei der Entwickelung der Principien hauptsächlich ankommt, und deren gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit den Hauptgegenstand aller geometrischen Untersuchungen ausmacht. Diese beiden verschiedenartigen Größen sind

1) die räumliche Ausdehnung an sich d. h. die allseitig räumliche Ausdehnung (Körper) mit ihren räumlich ausgedehnten Grenzen (Fläche und Linie), und

2) der Winkel im allgemeinsten Sinne, d. i. die Lagenverschiedenheit der ausgedehnten Grenzen selbst oder ihrer unendlich kleinen Theile.

§. 2.

Die gerade Linie ist die einfache räumliche Ausdehnung oder Erstreckung, ohne alle Lagenverschiedenheit der Theile.

Der ebene Winkel dagegen stellt die einfachste Lagenverschiedenheit (zweier geraden Linien) dar, ohne selbst die geringste eigentlich-räumliche Ausdehnung zu besitzen.

Die gerade Linie und der ebene Winkel sind daher die Urbestandtheile der Geometrie, oder, was dasselbe sagt, alle Bildungen der Geometrie geschehen durch die beiden ursprünglichen Arten der Bewegung, die fortschreitende und die drehende.

§. 3.

Will man die gerade Linie von der krummen unterscheiden, so bezeichnet man sie als eine Linie mit unveränderlicher Richtung. Es ist aber nicht die krumme Linie allein der geraden entgegenzusezzen, sondern die gebrochene mit ihr, so daß, indem gebrochene und krumme Linie zusammen der geraden entgegenstehen, sie wieder unter sich einen untergeordneten doch sehr wichtigen Gegensatz bilden.

1.) Diejenige absolute Bestimmung im Raume, welche alle Ausdehnung ausschließt, also die letzte räumliche Grenze und daher ein bloßer, an sich völlig bestimmter, wo auch immer gedachter Ort im Raume wird Punkt genannt.

2.) Die Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes.

3.) Verändert der Punkt bei der Bewegung seine Richtung nicht, so entsteht die gerade Linie.

4.) Aendert er hingegen seine Richtung während der Bewegung, so entsteht entweder die gebrochene oder die krumme Linie. Die erstere, wenn die Richtungsveränderung nur an einzelnen Punkten (discret), die letztere, wenn sie an allen Punkten (continuirlich) geschieht. Die einfachsten Gebilde der ersteren Art sind die geradlinigen Figuren der niederen Geometrie, die einfachsten der letzteren Art die ebenen Curven der höhern Geometrie. Bei der gebrochenen Linie fallen die beiden Elemente, Fortschritt und Richtungsveränderung oder Drehung, auseinander: während des Fortschrittes ist keine Drehung, während der Drehung kein Fortschritt; bei der krummen Linie dagegen sind progressive und rotirende Bewegung ununterbrochen vereinigt: indem man fortschreitet, dreht man sich. Nicht der geringste Fortschritt geschieht ohne Richtungsveränderung, nicht die geringste Richtungsveränderung ohne Fortschritt. Die erste Linie ist eine bloße Zusammensetzung (mechanische Verbindung) der beiden Grundbestandtheile; die letztere Linie eine stetige Vereinigung derselben, so daß sie beide, das Element der Ausdehnung oder die gerade Linie und das Ele-

ment der Richtungsveränderung oder der ebene Winkel, ihre Eigenthümlichkeit verlieren und in ihrem Zusammentreten ein drittes Höheres, die Curve, darstellen (organische Verbindung). Es sei erlaubt, dieses noch auf folgende Art zu bezeichnen. Die Intention des Fortschrittes ist, die einfache räumliche Ausdehnung oder die gerade Linie darzustellen, wovon er aber durch die zugleich geschehende Drehung abgehalten wird; umgekehrt ist die Intention der einfachen Drehung, sich in einem ebenen Winkel auszubilden, woran sie aber durch den zugleich erfolgenden Fortschritt gehindert ist: so daß die Drehung gewissermaßen fortgerissen und eine längs dem Fortschritte fließende wird, und daher alle Punkte der entstehenden Curve als die Scheitelpunkte unendlich vieler im Entstehen begriffen gewesener aber durch den Fortschritt an der Ausführung gehinderter ebener Winkel angesehen werden können.

Auf dieser Verschiedenheit der gebrochenen und krummen Linie beruht, beiläufig bemerkt, die Verschiedenheit der Methoden der elementaren und der analytischen Geometrie.

§. 4.

Es erleichtert vielleicht die Vorstellung der Vereinigung von Fortschritt und Drehung oder Winkel in der Curve, wenn man sich den im Fortschritte der Linie stetig wachsenden Winkel (die stetig zunehmende Richtungsveränderung) vorläufig in vielen äußerst kleinen einzelnen Winkelchen vorstellt, welche jedesmal nach einem äußerst kleinen geraden Fortschritt erfolgen. Läßt man nun die kleinen Winkel und Linien immer kleiner und kleiner werden, ohne jedoch ihre Summe abnehmen zu lassen, so nähert sich die Vorstellung der gebrochenen Linie immer mehr der einer Curve. Man erhält von einem solchen Uebergange eine sinnliche Anschauung, indem man sich eine solche äußerlich gebildete gebrochene Linie zuerst nahe vor das Auge legt und sie dann immer weiter von ihm entfernt. Im Anfange erscheint die Linie gebrochen, nachher werden die einzelnen Ecken immer undeutlicher und verschwinden endlich ganz. Dann erscheint die Linie nothwendig krumm; da die Richtungsveränderung des ganzen Zuges sichtbar bleibt, müssen die einzelnen nicht mehr wahrnehmbaren Winkel unmerklich in einander übergehen. Die Summe der Richtungsveränderungen ist die vorige, aber

statt in einzelne Stückchen zu zerfallen ist sie fließend geworden.

Der vorige §. gab die streng begriffliche Vorstellung der Curve; der jetzige selbst bietet nur eine unterstützende anschauliche dar, indem er die Curve als die Grenze bezeichnet, der sich eine Gebrochene unter den angegebenen Bedingungen in's Unendliche nähert.

§. 5.

Die Bedingung der Curve ist nach Obigem, daß die fortschreitende Linie in steter Wendung begriffen sei. Ist die Wendung die einfache, d. h. geschieht sie in einer Ebene, so hat man die ebene Curve. Diese hat daher an je zwei verschiedenen Punkten, sie mögen einander noch so nahe liegen, verschiedene Richtung, es sei denn, daß die Linie zwischen diesen Punkten genau eine ganze Umdrehung oder ein Vielfaches derselben gemacht habe. Vollführte sie aber statt dessen eine halbe Umdrehung oder ein ungerades Vielfaches derselben, so ist sie an den zwei Grenzpunkten dieses Bogens nicht in gleicher, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung.

Man bezeichnet die Richtung, die die Curve an irgend einem Punkte hat, durch eine von diesem

aus in derselben Richtung gezogene Gerade. Im Anfange, im Punkte a, hat die Curve Fig. 1 die Richtung ab, geht dann allmählig in die Richtung cd, darauf in ef u. s. w. über. Eine Reihe solcher Richtungslinien (Tangenten im weiteren Sinne) gewährt eine anschauliche Vorstellung der allmähligen Drehung der Curve. Der ebene Winkel (z. B. m), den zwei Richtungslinien (z. B. gh, kl) mit einander bilden, faßt immer die von der krummen Linie zwischen den Punkten (z. B g und k), an denen die Tangenten liegen, stetig gemachte Drehung in eine Summe zusammen. Denn um z. B. aus der Richtung, welche die Curve in g hat, in die ihr in k eigene Richtung sich zu versetzen, muß man nach und nach aus der Lage gh in die Lage ml übergehen, also nach und nach den $\angle m$ durch Drehung beschreiben.

§. 6.

Der stetige Fortschritt im Verein mit der stetigen Richtungsveränderung macht zwar das Wesen der krummen Linie aus, aber in dieser Allgemeinheit aufgefaßt ist sie noch kein Gegenstand theoretisch-mathematischer Betrachtung. Zufällige oder willkührliche oder doch solche Linien, mit deren et-

wo zufällig Statt findendem Bildungsgesetze man nicht bekannt ist, z. B. Umrisse ferner Gewölke, die hier und da ausweichenden Windungen eines Fußpfades, ein auf das Papier gemalter Kritzkratz sind krumme Linien, mit denen die theoretische Wissenschaft als solche nimmer etwas zu schaffen haben kann. Nur wo Einheit in der Mannigfaltigkeit und dadurch strenger Zusammenhang, d. h. wo ein vom Verstande gegebenes oder aufgefundenes Gesetz herrscht oder doch wenigstens ein Complex einzelner dem Geiste bewußter Bestimmungen sich findet, ist die Werkstatt der Wissenschaft. Da nun die beiden einzigen Elemente der Curve Fortschritt und Drehung sind, so muß also unter ihnen ein bestimmter Größen-Zusammenhang Statt finden, der, da zugleich beide stetig sind, jedesmal für den ganzen Zug, d. h. für alle einzelne Punkte der Linie derselbe bleibt. Nur dann sind alle ihre Theile zu einem harmonischen Ganzen vereint, die Größe der Richtungsveränderung ist durch die Größe des Fortschrittes gebunden oder umgekehrt; es ist die Willkühr gehoben, womit sich die Richtung stark oder schwach verändern könnte, der Fortschritt möchte dabei hier oder dort so groß oder so klein sein, als er wollte. Da nun der Fortschritt von irgend ei-

nem Punkte (er mag Anfangspunkt heißen), die Drehung von irgend einer ersten Richtung (Anfangsrichtung) anheben muß, und von da an gerechnet die Größe beider in steter Wandlung begriffen ist, so haben wir es bei der ebenen Curve offenbar mit zwei von einander gesetzmäßig abhängigen veränderlichen Größen zu thun, mit dem Fortschritte oder der Bogenlänge und der Drehung oder dem Winkel, die mit gemeinschaftlichem Namen Elemente oder Bestandtheile der Curve heißen mögen.

Damit eine bestimmte Krumme entstehe, muß also ein bestimmtes Zahlengesetz die Abhängigkeit angeben, worin für den ganzen Lauf der Curve die stets vom Anfangspunkte an gerechnete Größe des Fortschrittes von der dazu gehörigen stets von der Anfangsrichtung an gerechneten Größe der Richtungsveränderung oder umgekehrt steht; denn die Größen vergleichen sich unter einander durch Zahlen, und alle mögliche Abhängigkeiten von Größen fallen mit allen möglichen Abhängigkeiten der Zahlen zusammen. Es versteht sich dabei von selbst, daß sowohl die Zahlen, welche die Drehungsgrößen, als diejenigen, welche die Längen ausdrücken, als unbenannte gedacht werden, da beide Reihen

von Zahlen sich auf zwei verschiedene Einheiten beziehen, von denen jede eine absolute Größe von besonderer Art bezeichnet, die erste irgend eine, für jede Curve beliebig anzunehmende absolute Länge, die zweite eine dergleichen Winkel- oder Drehungsgröße, z. B. $\frac{3}{4}$ Rechte, 2 Rechte, 9 Rechte, überhaupt irgend einen beliebigen Theil oder ein Vielfaches der ganzen Umdrehung.

Ist z. B. acegk (Fig. 1) eine gesetzmäßige Krumme, so wird die der Länge ac entsprechende Zahl in derselben Abhängigkeit von der dem Richtungsunterschiede zwischen ab und cd entsprechenden Zahl stehen, worin die Zahl für den Bogen ae von der Zahl für den Richtungsunterschied zwischen ab und ef steht, worin ferner die Zahl für den Bogen ag von der Zahl für den Richtungsunterschied zwischen ab und gh steht, u. s. w.

§. 7.

Benennt man nun allgemein den veränderlichen Fortschritt oder die wandelbare immer zunächst von einem und demselben Anfangspunkte an gerechnete Länge einer Linie mit dem gewöhnlichen Zeichen für die Ausdehnung eines Bogens, s, die wandelbare Größe der Richtungsveränderung oder die während des Fortschrit-

tes s, also von der Anfangsrichtung an gemachte Drehung mit w (Winkel, Wendung), und bezeichnen f und φ jede beliebige Function, so ist der allgemeinste Ausdruck für alle ebene Curven

$$w = f(s) \text{ oder } s = \varphi(w).$$

Wäre z. B. die besondere Function

$$w^2 = s$$

gegeben, so hätte man

für	die	Drehung	$\frac{1}{10}$	die	Länge	$\frac{1}{100}$
=	=	=	$\frac{1}{2}$	=	=	$\frac{1}{4}$
=	=	=	1	=	=	1
=	=	=	2	=	=	4
=	=	=	10	=	=	100

Hätte dabei die Einheit für s z. B. die absolute Länge von 4 (Zoll), die Einheit für w die eines rechten Winkels, so entstände

für	die	Drehung	von	9°	die	Länge	0,"04
=	=	=	=	45°	=	=	1"
=	=	=	=	90°	=	=	4"
=	=	=	=	180°	=	=	16"
=	=	=	=	900°	=	=	400" ꝛc.,

und wie hier für die 5 bestimmten Punkte jeder Drehung ihre bestimmte Länge vermöge des Gesezzes zukommt, so folgt aus dem lezteren für alle

übrige Curvenpunkte eine ähnliche Bestimmung: für jede willkührlich angenommene Drehung erhält die Länge ihr bestimmtes Maaß. Oder es erhält umgekehrt, wenn in der Function s als willkührlich veränderlich, w als abhängig veränderlich gesetzt, und sie daher durch $\pm\sqrt{s}=w$ ausgedrückt wird, für jede willkührlich angenommene Länge jede dazu gehörige Drehung ihre bestimmte Größe, oder eine Mehrheit derselben, hier zwei.

§. 8.

Sollen daher alle mögliche Curven vorgestellt oder gedacht werden, so muß man alle mögliche Functionen unter zwei veränderlichen Größen aufstellen; die Eintheilung und das System von diesen wird auch Eintheilung und System der Curven bestimmen; der einfachsten Function wird die einfachste Linie entsprechen u. s. w. Dieses System der natürlichen Verwandtschaft der Curven aufzustellen ist eine schwierige Aufgabe, deren Lösung wichtig ist. Andeutungen darüber folgen im dritten Abschnitte, da der gebräuchliche oberste Eintheilungsgrund, die Classification der algebraischen Functionen und Curven nach ihren Graden, offenbar nur die Geltung eines Unter-Eintheilungsgrundes haben sollte.

§. 9.

Bei der bisherigen Darstellung dieses Kapitels bin ich sehr ausführlich zu Werke gegangen. Einerseits lag mir an der höchsten Klarheit an sich, und selbst an der Verständlichkeit für Leser, die kaum die Schwelle der höheren Mathematik überschritten haben, andererseits war es mir darum zu thun, nicht nur die Leichtigkeit und Ungezwungenheit der Grundgedanken dieser Methode, sondern auch deren Ursprünglichkeit, ihre nächste und nothwendige Folge aus den Grundbegriffen der Wissenschaft zu zeigen. Zu gleicher Zeit sollte der Beweis geliefert werden, daß in der höheren Geometrie die analytische Methode überhaupt die wahrhaft und im höheren Sinne wissenschaftliche ist; indem nachgewiesen wurde, wie sie als analytische für die Curve als Linie unmittelbar und mit Nothwendigkeit aus den Principien hervorgeht. Denn für die krummlinig begrenzte ebene Fläche (Coordinaten-Methode) gilt durch Beziehung der letzten Hälfte des zweiten Kapitels der Einleitung auf diese Nachweisung ganz dasselbe Ergebniß. Darin eben liegt die Grundverschiedenheit der analytischen Methode von der syn-

thetischen, daß die erstere vom eigentlichen Begriffe des Objectes selbst, die letztere aber von einem uneigentlichen Begriffe, nämlich von irgend einer (bequem gewählten, ohne wesentliche Hülfe analytischer Formen zu bestimmenden) Eigenschaft des Objectes ausgeht und daraus andere Eigenschaften, auch den eigentlichen Begriff folgert. In der Art, wie dieses geschieht, besteht die zweite wesentliche Verschiedenheit. — Bisher hatte sich die Parthei der Analytiker nur auf die Kraft ihrer Methode und deren Erfolge berufen; indeß läßt sich nur aus dem hier genommenen Standpunkte der langwierige neuerdings in England zwischen Leslie *) und Lardner **) in helle Flammen ausgebrochene Streit der synthetischen und analytischen Methode gründlich und für immer entscheiden. Das Verhältniß beider Methoden ausführlich zu beleuchten behalte ich mir für einen anderen Ort vor. Ohne den hohen subjectiven Werth der synthetischen Methode zu läugnen zeigt

*) Geometrical Analysis and Geometry of curve lines. By John Leslie, Professor etc. in the University of Edinburgh. Edinburgh 1821. Vorrede S. I u. VIII.

**) A treatise on algebraic Geometry. By Dionysius Lardner, Professor etc. in the University of London. London 1831. Vorrede S. XL ff.

diese Beleuchtung, daß sich die höhere Geometrie da, wo es auf weitere Entwickelung und höhere Vollendung der Wissenschaft ankommt, einzig und allein in den Entwickelungsformen der analytischen Methoden fortzubewegen und weiter auszubilden hat.

§. 10.

Ist nun irgend eine Gleichung zwischen den beiden in Rede stehenden veränderlichen Größen gegeben und gelöst, so muß man die Werthe für s und w in's Geometrische übersetzen, d. h. ihnen die entsprechende räumliche Deutung geben. Was in dieser Beziehung die Größe der Werthe anlangt, so versteht sich darüber nach dem Gesagten alles von selbst; nur die räumliche Bedeutung der Vorzeichen ist noch in Betrachtung zu ziehen; es muß die allgemeine mathematische Beziehung der Entgegensetzung auf die räumlichen Größen der Drehung und Länge übertragen werden.

Zu diesem Zwecke versetze man sich in irgend einen Punkt (a, Fig. 2) der Ebene, der der Anfangspunkt sei, und von ihm aus in irgend eine Richtung (ab), die Anfangsrichtung. Im Fortschritte kann man sich nun nach der einen oder der

andern Seite von ab, also nach ad oder nach af drehen, so daß ag oder ah die entsprechenden Curven-Anfänge wären. (Der Deutlichkeit wegen sind kleine gerade statt der krummen Linien abgebildet.) Diese beiden Drehungen sind einander entgegengesetzt; denn eine nach der einen Seite gemachte wird durch eine eben so große nach der andern Seite wieder aufgehoben: ihre Größen sind also auch entgegengesetzte Größen und mit verschiedenen Vorzeichen zu versehen. Die Drehung nach rechts sei die positive, die nach links die negative. Die Curve ahkm hätte sich also zuerst um den negativen Winkel bah, dann, da die fernere Drehung nach derselben Seite geht, von neuem um den negativen Winkel fhk gedreht, zusammen also für den Fortschritt ahk die Drehung —(bah + fhk) gemacht. Vom Punkte k aus aber fängt sie an sich entgegengesetzt, also positiv, zu wenden, und zwar für den Fortschritt km um den Winkel nkm; für die ganze Länge ahkm beträgt also ihre Wendung —bah—fhk+nkm. Ein Punkt, wie k, wo die Drehung einer Krummen anfängt nach der entgegengesetzten Seite zu geschehen, heißt ein Wendungspunkt, und an einem solchen findet stets ein Maximum der bisherigen positiven oder negati-

ven und daher ein Minimum (der Anfang) der negativen oder positiven Drehung Statt.

§. 11.

Was nun ferner die Länge oder den Fortschritt betrifft, so ist er in unserm Beispiele in Beziehung auf den Anfangspunkt a sowohl für die positive als für die negative Drehung nach derselben Richtung, nämlich nach b hin erfolgt. Man kann ihn aber auch von a aus nach der entgegengesetzten, nach c hin, nehmen, z. B. während der anfangenden Drehung den Fortschritt ap oder aq machen. Die letzteren beiden Fortschritte nun sind den ersteren beiden (ag, ah) entgegengesetzt, da sie ursprünglich von demselben Punkte (a) aus nach einer gerade entgegengesetzten Richtung gedacht werden. Entgegengesetzt ist diese Richtung der Fortschritte aber, weil der eine den andern von gleicher Größe aufhebt. Die Größenwerthe entgegengesetzter Fortschritte erhalten also auch verschiedene Vorzeichen; der nach oben oder bei anderer Lage nach rechts mag der positive, der nach unten oder nach links der negative heißen. ab, ahkm sind also positive, ap, aq negative Fortschritte.

§. 12.

Es muß noch einer möglichen Verwechselung vorgebeugt werden, nach welcher man in Bezug auf den negativen Fortschritt die Drehung nach der Seite ar für positiv, die nach der Seite at für negativ ansprechen könnte. Denn geht gleich die erstere nach rechts, die letztere nach links herum, wenn man sich in c und nach a gerichtet denkt, so ist es doch umgekehrt, sobald man, wie es geschehen muß, sich in den Punkt versetzt, von welchem aus die Drehung geschieht, nämlich in a, und sich dabei nach c kehrt. Nun ist von ac nach ar die Drehung links herum, also negativ, von ac nach at rechts herum oder positiv. Die Vorstellung, immer in Beziehung auf einen schon gesetzten beliebigen Punkt und eine schon gesetzte beliebige Richtung (hier Anfangspunkt, Anfangsrichtung) gedacht, wird am sichersten, wenn man zugleich die entgegengesetzte Richtung, z. B. in Rücksicht auf ab die ganze Linie bac in Drehung denkt. Indem sich nun ba nach da dreht, erhält zugleich ac die veränderte Lage pt. Beide Drehungen gehen nach derselben Seite, hier nach rechts, sind also einstimmig und daher mit gleichen, hier mit positiven Vorzeichen zu versehen.

Auf den Punkt a, die Richtung ab bezogen sind also die Curventheilchen

$$ag = + w, + s,$$
$$ah = - w, + s,$$
$$ap = + w, - s,$$
$$aq = - w, - s.$$

§. 13.

Schon §. 10 ist gelegentlich der Fall erörtert, wenn die Drehung im schon begonnen Laufe der Linie eine der bisherigen entgegengesetzte wird; dasselbe ist noch in Beziehung auf den Fortschritt zu thun. Wenn dieser bei fortgehender Drehung wieder abnimmt, z. B. für eine gewisse Drehung (Fig. 5) ac war, welches 8 sei, nun aber für eine größere Drehung wieder kleiner wird, z. B. nur noch 5 beträgt, so kann er von dem Punkte der Abnahme (von c) an nicht mehr in der vorigen Richtung (cd) fortgehen, sondern muß in der entgegengesetzten (ce) genommen werden. Behält dabei die Drehung ihren unentgegengesetzten Fortgang, so drehen sich die Richtungslinien nach derselben Seite wie vorher, hier, wo man von c nach e gekehrt ist, rechts. Es rotirt also doe bei der Bildung der Curve nach derselben Seite, wie vorher ab, so

daß man sich beim Fortschreiten von c nach e in einer Linie wie cf fortbewegt, und das neue Curvenstück dem vorigen nothwendig die erhobene Seite zuwendet. An einem solchen Uebergangspunkte des Fortschrittes in den entgegengesetzten bei unentgegengesetzter Fortdrehung ist also eine sogenannte Spitze (cuspis). Würde cf = 3 gesetzt, so betrüge die ganze Linie acf also + 8 — 3 = 5. Die absolute Länge der acf ist freilich 11; durch die entgegensetzende Beziehung aber der Richtungen des Fortschrittes vermindert sie sich bis auf 5. Und so in ähnlichen Fällen.

§. 14.

Wenn in einem und demselben Curvenpunkte beide Bestandtheile, Fortschritt und Drehung, entgegengesetzt werden, so entsteht ein Schnabel (bec d'oiseau), Punkt c, Fig. 6. Denn da der bisherige Fortschritt in der Richtung acd läuft, so wird er vom Punkte der Entgegensetzung c an in in der Richtung ce gehen müssen, und da die bisherige Drehung rechts herum erfolgte, so wird sie nun nach links geschehen, also die Richtungslinie ce sich nach der Seite, wo f steht, drehen. Dadurch bildet sich eine Fortsetzung der Curve wie cf. Das

eine Curvenstück kehrt dem andern die erhobene, dieses jenem die hohle Seite zu, wie es weiter unten näher gezeigt wird.

Der Leser kann schon hier voraussehen, wie viel leichter es nach dieser als nach der Coordinaten-Methode ist, die Anwesenheit und den Ort solcher characteristischen Punkte einer Curve aus der Function nachzuweisen.

Zweites Kapitel.

Entwickelung des ursprünglichen Begriffes der doppelt gekrümmten Linie und der gebogenen Fläche.

§. 15.

Es bleibt noch übrig, die gleichmäßige Anwendbarkeit der Methode zunächst als einer begriffbestimmenden (worauf alles ankommt) auf doppelt gekrümmte Linien und gebogene Flächen wenigstens im Allgemeinen nachzuweisen; denn im Besonderen beschränken wir uns auf ebene Curven, da auf diesem einen unermeßlichen Felde doch wenige Schritte gethan werden sollen, um das Wesen der Methode nach einigen

Hauptbeziehungen darzustellen und künftigen Mitarbeitern den Zugang zu öffnen. Es wird dann weniger schwer fallen, auch jene beiden Gebiete, die noch schneller, als das erste, nach allen Seiten einen ungeheueren Umfang gewinnen, mit Glück zu betreten.

§. 16.

Von den Elementen, von denen der Lauf einer doppelt gekrümmten Linie abhängt, erhält man am leichtesten eine klare Vorstellung, wenn man sich statt der doppelt gekrümmten zuerst eine doppelt gebrochene, d. h. eine aus Geraden, von denen nie je drei zusammenstoßende in derselben Ebene liegen, zusammengesetzte Linie denkt. Man darf dann hinterher nur die Zahl der Winkel, welche die einzelnen Geraden verbinden, immer mehr steigern, ohne die Summe ihrer Größe zu ändern, und die Winkel zuletzt längs der Linie fließend werden lassen, um die Vorstellung der doppelt gekrümmten Linie zu erhalten.

Es sei eine doppelt gebrochene Linie gegeben. Die erste und zweite Gerade, aus denen sie zusammengesetzt ist, liegen also in einer andern Ebene, als die zweite und dritte. Um z. B. die Lage dieser letzteren gegen einander völlig zu bestimmen,

bedarf es sowohl des ebenen Winkels, den sie in der ihnen gemeinschaftlichen Ebene bilden, als auch des Neigungswinkels, den diese Ebene mit derjenigen macht, in welcher die erste und zweite Gerade liegen.

Man kann indeß statt dieser beiden bestimmenden Winkel zwei andere wählen; wo denn aber auch die Ebenen andere, und zwar senkrecht auf einander stoßende werden.

In der doppelt gebrochenen Linie grenzen immer zunächst zwei Gerade an einander. Man denke sich eine beliebige Ebene durch eine von ihnen gelegt, die die folgende nicht mit in sich aufnimmt, so soll sich an den Endpunkt der ersten eine zweite Gerade fügen, die nicht in dieser Ebene liegt. Um die Lage dieser zweiten Geraden, die man sich schon willkührlich gelegt denke, gegen die erste auf eine einfache Weise zu bestimmen, legt man durch sie von allen möglichen Ebenen, welche durch sie gelegt werden können, diejenige, welche senkrecht auf der ersten Ebene steht. In irgend eine und zwar eine einzige solche senkrechte Ebene muß sie nach einem elementar-stereometrischen Satze fallen. Dieser senkrechten Ebene Stellung auf der ersten oder der Grundebene ist durch einen ebenen Winkel in

der letzteren, zwischen der ersten Geraden als dem einen Schenkel, und der Schneidungslinie beider Ebenen als dem andern Schenkel bestimmt, und es bedarf nur noch außerdem der Angabe eines zweiten in der senkrechten Ebene liegenden ebenen Winkels, nämlich desjenigen zwischen der zweiten Geraden als dem einen Schenkel und der Schneidungslinie beider Ebenen als dem andern Schenkel, um die Lage der zweiten Geraden gegen die erste völlig fixirt zu haben.

Zwei ebene Winkel also sind es, durch welche dieses geschieht, und wir dürfen sie nur als veränderlich denken, um jede mögliche Lage beider Linien gegen einander hervorzubringen. Folglich hängt der Lauf einer doppelt gekrümmten Linie von der Relation zwischen diesen zwei veränderlichen ebenen Winkeln und der Länge der Linie ab. Man hat demnach dem s und w nur ein drittes Zeichen, etwa u, für einen zweiten veränderlichen Winkel, der am besten der Erhebungswinkel heißt, hinzuzufügen. Da nicht zwei der Veränderlichen die dritte bestimmen, sondern von einer die beiden andern abhängen, so wird der Begriff einer doppelt gekrümmten Linie nicht durch eine Gleichung unter den drei Veränderlichen, sondern jederzeit durch zwei zusam-

mengehörige Gleichungen, eine unter s und w, und eine unter w und u oder s und u gegeben.

Ein einfaches Beispiel diene zur Veranschaulichung. Der ∠u sei constant; wäre es auch der ∠w, so würde die Linie eine aus der Ebene sich erhebende Gerade sein. Aber dieser sei durch die Function auf solche Art abhängig von s, daß ohne das Hinzukommen des u ein Kreis in der Ebene entstände. Nun muß sich die Linie im Aufsteigen unter stets gleichem Winkel zugleich kreisförmig winden; es entsteht daher die einfachste der um den Cylinder gewundenen Spiralen. Diese ist also, wie sich hier beiläufig zeigt, überhaupt die einfachste aller doppelt gekrümmten Linien; denn u kann nicht einfacher gewählt werden, ebenso w nicht, da eine krumme Linie entstehen soll und der Kreis die einfachste ist. Die nächstfolgende ist die einfachste der um den geraden Kegel gewundenen Spiralen; auch hier bleibt u constant. U. s. w.

Das Grundverfahren (d. i. das definirende) der ursprünglichen Methode ist demnach auf doppelt gekrümmte Linien eben so leicht als auf ebene Curven anzuwenden. Von der Ableitung der Eigenschaften solcher Linien gilt dasselbe; ein Theil dieser Untersuchungen wird künftig in verhältnißmä-

ßig noch höherem Grade als bei den ebenen Curven erleichtert sein. Dabei hat die Methode noch den Vortheil, daß sie alle doppelt gekrümmten Linien vor der Betrachtung der gebogenen Flächen und ohne alle Rücksicht auf sie bequem behandeln kann.

Uebrigens sieht man leicht, wie die Linien von einfacher und die von doppelter Krümmung sich gemeinschaftlich behandeln und die ersteren als ein besonderer Fall der letzteren betrachten lassen. Diese Aufgabe hat die Wissenschaft zu lösen, wo sie nach streng herabsteigender Methode verfahren will.

§. 17.

Da eine Fläche, als solche, durch die Bewegung einer Linie sich bildet, so wird die ursprüngliche Methode so wohl das Gesetz, nach welchem die bewegliche Linie, als solche, entsteht, als auch das Gesetz, nach welchem sie sich bewegt, in's Auge zu fassen haben.

1. Die Bewegliche sei eine unendliche Gerade.

a. Sie bewege sich bloß progressiv, d. h. parallel mit sich selbst fort. Geschieht dieses auf einer Geraden, so entsteht die Ebene, geschieht es auf einem Kreise, der Cylinder, entweder der ge-

wöhnliche oder der elliptische, je nachdem die Bewegliche senkrecht oder schief auf der Kreisebene steht. Ist der Weg eine andere ebene Curve, z. B eine Spirale, so wird irgend eine cylindrische Fläche erzeugt, z. B. die spiralische Rolle, durch Aufrollung eines Papierblattes darstellbar. Bei allen Flächen dieser Art, die allgemein die cylindrischen heißen, haben wir es reel nur mit 2 Veränderlichen, denen der ebenen Krummen, zu thun, da die außerdem vorhandene veränderliche Gerade nur als einfache Dimension wirkt. Die cylindrischen Flächen sind also die einfachsten unter den gebogenen, und als bloße ebene Curven, die körperliche Dimension angenommen haben, zu betrachten.

b. Die Gerade bewege sich bloß drehend. Einer ihrer Punkte verharrt also an seinem Orte und um diesen geschieht die drehende Bewegung der Linie.

Um zu finden, von welchen Veränderlichen diese Bewegung abhängt, denken wir die sich Drehende in 3 verschiedenen Lagen fixirt. Nun springt gleich in die Augen, daß 2 Winkel die Lage von je zweien dieser Linien bestimmen: die Lage z. B. der zweiten gegen die dritte Linie hängt einerseits von dem ebenen Winkel ab, den sie mit einander in der ihnen gemeinschaftlichen Ebene bilden, ande-

rerseits von dem Neigungswinkel dieser Ebene gegen diejenige, in welcher die erste und zweite Linie liegen.

Statt dieser beiden Winkel können jedoch auch hier zwei andere gewählt werden. Legt man nämlich durch den ruhenden Punkt der bewegten Geraden eine Ebene, so hat die Gerade gegen diese irgend eine Neigung. Diese Neigung wird nach §. 16 durch 2 ebene Winkel, den Horizontal-Winkel (in der Grundebene) und den Vertical- oder Erhebungs-Winkel (in der darauf gestellten senkrechten Ebene) bestimmt. Der Horizontal-Winkel ist hier in Beziehung auf den ruhenden Punkt ein Centriwinkel und kann deshalb diesen Namen erhalten. Während nun die erzeugende Linie sich dreht, werden beide Winkel einer gesetzlichen Veränderung unterworfen sein können.

Es handelt sich also auch hier um die gegenseitige Abhängigkeit nur zweier Veränderlichen und zwar zweier Winkel, wozu außerdem noch die willkührlich veränderliche Dimension der Geraden kommt. So viele verschiedene Gesetze der Abhängigkeit zweier Veränderlichen oder so viele ebene Curven möglich sind, so viele Flächen dieser Art giebt es also. Sie sind mit gemeinschaftlichem

Namen die conischen genannt, und die angegebene Weise ihrer Erzeugung ist die ursprüngliche. Jedoch lassen sie sich auf verschiedene Arten hervorbringen und daher auch untersuchen, wie dieses mit allen gebogenen Flächen der Fall ist. Gewöhnlich setzt man eine ebene Curve, deren Ebene außerhalb des oben bezeichneten festliegenden Punktes liegt, und regulirt die Drehung der Geraden durch das Herumführen derselben an der Curve. Ist diese z. B. eine Parabel, so entsteht die parabolisch-conische Fläche, ist sie eine Spirale, die spiralisch-conische Fläche rc.

Anfänger fassen leicht den Begriff der conischen Flächen zu eng auf und müssen wohl beachten, daß die Eigenschaft, einen endlichen Raum völlig zu umschließen, nicht zu ihrem Wesen gehört. Nach der einen Dimension ist diese endliche Umschließung unmöglich, nach den beiden anderen nur möglich, nicht nothwendig. Denn was die erste Dimension betrifft, so muß die bewegliche Gerade schlechterdings unendlich gedacht werden, man erhält sonst einen endlichen Theil einer unendlichen gebogenen Fläche, wie bei der Erzeugung des gemeinen Kegels durch Drehung einer endlichen Geraden. Die Grundebene des letzteren gehört keinesweges zu sei-

ner gesetzlichen Form, sondern ist als hindurchgelegt zu denken; überhaupt ist an keiner gebogenen Fläche als solcher eine Begrenzungsebene oder eine Ebene als Bestandtheil. Nach den beiden anderen Dimensionen ist der Raum nur dann geschlossen, wenn die Gerade an einer *in sich zurückkehrenden* Curve herumgeführt wird; in jedem anderen Falle zieht sich die conische Fläche mehr oder weniger ebenenartig auseinander, besonders wenn die Curve eine einfache langgestreckte z. B. die Sinusoide ist. — Für die cylindrischen Flächen gelten ganz dieselben Bemerkungen.

Unter den conischen ist die einfachste der Mantel des geraden gemeinen Kegels, denn er entsteht nach unserer Erzeugungsweise, wenn man den Vertical-Winkel constant setzt. Die conischen Flächen überhaupt zeigen sich als die einfachsten nach den cylindrischen. Es könnte sogar scheinen, als machten sie diesen in dieser Rücksicht den Rang streitig, weil man auch hier außer der einfachen Dimension der Geraden nur zweier Veränderlichen bedarf; aber man muß nicht übersehen, daß die rotirende Bewegung höherer Natur als die fortschreitende ist; denn bei der einfachen drehenden Bewegung beschreiben die Punkte der bewegten Linie concen-

trische Kreise, bei der bloß progressiven Bewegung gleiche gerade Linien. Die drehende Bewegung kann daher als eine wenn auch sehr einfache Function zwischen 2 Veränderlichen mehr geltend angeschlagen werden. Man sieht auch, daß es so ist, wenn man irgend eine conische Fläche durch eine ebene Curve bildet, die parallel mit sich selbst fortschreitet und die dabei nach Verhältniß ihres Fortschreitens ihre Größe verändert. Hier hat man zuerst die Function der ebenen Curve an sich und außerdem die Function zwischen der Größe ihres Fortschrittes und ihrer eigenen Ausdehnung, während man bei der Bildung der conischen Fläche durch Drehung reel nur einer einzigen Function zwischen 2 Veränderlichen bedarf.

c. Die Gerade bewege sich zugleich fortschreitend und drehend. Geschieht der Fortschritt auf einer ebenen Curve, so haben wir (außer der einfachen Dimension der Geraden) offenbar 4 Veränderliche, da die Bestimmung der Neigung der Geraden gegen die Ebene der Curve durch 2 Winkel erfolgt. Aber von einem einzigen unter den vier veränderlichen Bestandtheilen hängen die drei übrigen ab, weshalb drei Gleichungen unter je zwei Veränderlichen zur Definition ausreichen. Hier entsteht

eine große Mannigfaltigkeit interessanter Flächen, von denen erst wenige bekannt sind. Die einfachste durch nur zwei Gleichungen bestimmbare Art derselben geht hervor, wenn man die bewegliche Gerade auf einer ebenfalls Geraden (durch die man beliebig eine Ebene gelegt denke) sich bewegen läßt, und innerhalb dieser Art wieder die einfachste Unterart, indem man dabei den Horizontal-Winkel der Drehung constant, am einfachsten 90° nimmt, und nur den Vertical-Winkel einer gesetzlichen vom Fortschritte abhängigen Veränderung unterwirft. Ist diese Veränderung dem Fortschritte proportional, so entsteht die einfachste der Flächen dieser Unterart, die gemeine Wendeltreppe. Noch anziehender sind andere hierher gehörige Formen, z. B. die durch Bewegung der Geraden auf einer Kreislinie entstehende, wenn beide Winkel sich dem Fortschritte proportional verändern. — Die Vorstellung solcher Flächen-Arten wird erleichtert, wenn man die bewegliche Gerade zuerst endlich denkt, und erst nach so geschehener Bildung der Form verunendlicht. Wünscht man solche Flächen äußerlich darzustellen, so geschieht es am bequemsten durch Nadeln, die auf einer Ebene von weichem Holze gesteckt werden.

Da diese Flächen-Art sich zu den beiden vori-

gen (a und b) wie das Allgemeine zu dem Besonderen verhält, so können die cylindrischen und conischen Flächen als mit unter diesen begriffen gedacht werden. Die cylindrischen, indem man die beiden Drehungswinkel constant setzt, die conischen auf doppelte Weise, indem man entweder den Fortschritt so wie den mit ihm verbundenen in seiner Ebene liegenden Winkel annihilirt oder die Drehungswinkel so bestimmt, daß die bewegliche Gerade stets durch einen und denselben Punkt läuft. Den Flächen dieser Rubrik würde man daher nicht unschicklich den Namen der cylindrisch-conischen beilegen.

Alle drei Flächen-Arten (a, b, c) dieser Klasse (1) pflegt man unter der Benennung der einfach gebogenen zusammen zu fassen, und sie werden, ihrer Erzeugung gemäß, characterisirt, indem man sagt, es lasse sich von jedem beliebigen Punkte in ihnen aus nach irgend einer Richtung eine Gerade ziehen.

In dieser kleinen Entwickelung sind zugleich die Grundzüge der wissenschaftlichen Eintheilung der einfach gebogenen Flächen gegeben.

2. Die Bewegliche ist eine Krumme.

Es eröffnet sich hier in den doppelt gebogenen Flächen, als den höchsten Gegenständen der Geometrie, ein unabsehbares Gebiet voll überschwänglichen Reichthums an Formen. Um sie unter die Herrschaft unserer Methode zu bringen genügt die Bemerkung der Ueberschrift, daß die Erzeugende eine Krumme, statt vorher unter a eine Gerade ist. Die Bestimmung der Formen erfolgt also hier auf ähnlichem Wege wie vorher, wir haben es immer mit der gegenseitigen Abhängigkeit von veränderlichen Längen und Drehungsgrößen zu thun, wodurch Verbreitung und Gestaltung der Fläche hervorgehen. Nur vermehrt sich noch die Anzahl der Veränderlichen. Die einfachsten Flächen unter den doppelt gebogenen sind die durch Rotation hervorgehenden, unter denen die Kugel voran steht.

Die vollständigen Gleichungen für diese zweite Klasse schließen auch die Flächen der ersten Klasse in sich. Von den Gleichungen bei der Eintheilung der Flächen auszugehen ist nicht eher thunlich, bis, wie hier geschehen, die vorkommenden Veränderlichen characterisirt sind. Die Behandlung dieser Gleichungen zur Untersuchung der Flächen nach der ursprünglichen Methode findet in der Behandlung der ebenen Curven ein wesentlich erleichterndes Vorbild,

wenn gleich kein völlig umfassendes, da noch eigenthümliche Momente bei den Flächen hinzutreten. Die grössere Zahl der Veränderlichen, die diese Methode bei den höheren Flächen fordert, darf nicht zu der Ansicht verleiten, als seien die Untersuchungen nach derselben schwieriger, als nach der Coordinaten-Methode (mit 3 Axen). Diese ist die Methode für die Körperräume und deren Dimensionen; ihre Relativität für die gebogene Fläche als solche ist Ursache zu vielen vermeidlichen Schwierigkeiten in der Behandlung derselben geworden.

§. 18.

Aus dem Bisherigen wird sowohl das Wesen als die Ursprünglichkeit und wissenschaftliche Nothwendigkeit der neuen Methode, so weit sie definirend, nicht analysirend oder demonstrirend ist (welches Letztere noch nicht hierher gehört), klar geworden sein. Ich schließe daher dieses Kapitel mit folgender Begriffbestimmung:

Die ursprüngliche Methode (im engeren Sinne) ist diejenige Methode der höheren Geometrie, nach welcher jede Linie in der Ebene vermöge des Größengesetzes, das die gegenseitige Abhängigkeit ihrer veränderlichen Länge und ihrer Drehung oder Richtungsveränderung aus-

drückt, gedacht oder erzeugt, und nach allen ihren Beziehungen und Eigenschaften durch zweckdienliche Handhabung dieses Abhängigkeitgesetzes erkannt wird; diejenige Methode, die ferner auch die doppelt gekrümmten Linien und gebogenen Flächen vermittelst Functionen zwischen den an ihnen vorkommenden einfachen Ausdehnungen und Richtungsveränderungen bestimmt und erforscht.

Demnach ist diese Methode, gleich der Coordinaten-Methode, eine analytische. Sie geht von den Functionen aus, bildet nach Maaßgabe der systematischen Anordnung dieser das Gebäude der Wissenschaft und stellt dabei allgemeine Methoden der Behandlung der Functionen zu den verschiedenen Zwecken der Untersuchung auf.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Eintheilung der ebenen Curven und ihrer Eigenschaften.

Erstes Kapitel.

Unterscheidung zweier Hauptsysteme von Eigenschaften. Umriß eines allgemeinen Systemes der absoluten Eigenschaften ebener Curven.

§. 19.

Die Classification der Curven selbst geschieht nothwendig vermittelst der Begriffe derselben; sie hängt also von der Classification der Functionen ab. Aber es ist die Frage, ob unmittelbar die Begriffe selbst und ihre Merkmale die Unterscheidungsgründe darbieten oder ob erst die Entfaltung der Begriffe, bis zu einem gewissen Grade, also die Ableitung wenigstens der nächsten und er-

sten Eigenschaften aus denselben genügende Kriterien liefern. Man hat bisher beide Principien vereinigt angewendet. Die algebraischen Curven werden nach dem Grade der Function, also unmittelbar durch den Begriff selbst und zwar durch ein einzelnes Merkmal desselben unterschieden; Curven eines und desselben Grades aber nach gewissen elementaren Eigenschaften, z. B. der Anzahl der Zweige, der Geschlossenheit oder offenen Unendlichkeit des Laufes ꝛc.; wie es bei den Kegelschnitten, auch bei den Linien der dritten Ordnung geschieht. Bleibt aber auch die Frage, ob man mit den Begriffen selbst ausreiche oder nicht, unerörtert, so ist doch jedenfalls gewiß, daß die Eintheilung der Curven selbst nahe mit der Eintheilung gewisser Eigenschaften derselben zusammenhängt. Den im zweiten Kapitel folgenden Andeutungen über eine künftige sachgemäße Klassificirung der Curven lasse ich deshalb die oberste Eintheilung der Eigenschaften und eine nähere Characterisirung ihrer ersten Hauptklasse vorangehen.

§. 20.

Ein wesentlicher Mangel der bisherigen Bearbeitungen der Wissenschaft besteht nicht nur in der Abwesenheit eines methodischen Verfahrens, nach welchem

aus dem Begriff einer Curve der Complex der Eigenschaften in gesetzmäßiger Folge und bis auf eine gewisse Grenze vollständig entwickelt würde, sondern in der gänzlichen Unordnung, Willkühr und vollendeten Unwissenschaftlichkeit, die in dieser Rücksicht herrscht. *) Bald sieht man eine Eigenschaft dieser, bald jener Art entwickelt, bald fehlt diese oder jene ohne Grund, häufig muß man mit der Rectification, Quadratur und dem Appliciren einer Tangente fürlieb nehmen. Erkenntniß einer Curve hat indeß nur der, der von der unendlichen Reihe ihrer Eigenschaften eine gewisse Anzahl von Gliedern, vom ersten an, in systematisch zusammenhängender Aufeinanderfolge, ihres Zusammenhanges sich bewußt, überblickt; nicht der, der diese oder jene vereinzelte Eigenschaft einsieht. Viel mehr als das Letztere ist meistentheils bisher nicht angestrebt oder erreicht. Nur hier oder da drang die günstige Beschaffenheit des Gegenstandes die Entwickelung einer kleineren oder größeren Kette zusammenhängender

*) Dieser unumwunden ausgesprochene Tadel trifft den Zustand der Wissenschaft, nicht ihre sorgsamen und gewandten Bearbeiter. Für jede vervollkommnende Metamorphose muß erst die Stunde geschlagen haben, und nur wer sie überhört, eignet sich selbst den Tadel zu.

Eigenschaften auf, doch nirgend findet sich eine eigentliche Systematik für dieselben. Auf diese kommt es vornehmlich an und sie muß das Augenmerk der Forscher sein. Die Coordinaten-Methode legt ihr wegen der Künstlichkeit, mit der sie das eigentliche Object behandelt, in Beziehung auf dieses selbst fast unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg; die neue Methode führt ungleich leichter auf den natürlichen Zusammenhang der Eigenschaften einer Curve.

§. 21.

Um die Begriffe: Begriff einer krummen Linie und Eigenschaft derselben, zu sondern, mag zunächst Folgendes bemerkt werden:

Der Begriff, die gesetzmäßige Einheit einer Curve, spricht sich nicht nur darin aus, daß ihre Elemente, Länge und Winkel oder Drehung, von einem einzigen bestimmten, sondern daß sie von irgend einem beliebigen Punkte in ihr aus gerechnet, bis zu jedem beliebigen Punkte in ihr, also für ihren ganzen Lauf, in einer und derselben gegenseitigen Abhängigkeit stehen. Wählt man den Punkt, von dem man ausgeht, den Anfangspunkt, anderswo, so kann zwar die Abhängigkeit eine andere werden, aber für jeden einmal gewählten Anfangspunkt, er

sei gewählt, wo er wolle, ist die Abhängigkeit in derselben Curve eine und dieselbe. Dies ist leicht zu zeigen. Ist die Function einmal gesetzt, so ist mit ihr auch der Anfangspunkt, im Verhältniß zu dem Laufe der Curve, gegeben. Denn nimmt man in der Function die Länge $=0$, so hat man den Anfangspunkt und für ihn einen bestimmten Werth für die Drehung, die die Curve in diesem Punkte von der Anfangsrichtung aus schon gemacht hat, es sei diese Größe nun positiv oder negativ, 0, endlich oder unendlich, möglich oder unmöglich. So lange man nun den Anfangspunkt nicht ändert, ist die Function von ihm aus dieselbe für alle Punkte. Geschieht aber eine solche Aenderung (wie es oft zur Erforschung der Curve nöthig ist), schiebt man also den Anfangspunkt vor oder zurück, d. h. setzt man an die Stelle von s in der Function $s' \pm a$, so ist begreiflich, daß die Function dadurch eine Veränderung erleiden könne; nachdem dieses aber geschehen, bleibt sie in Beziehung auf den neuen Anfangspunkt für den ganzen Lauf der Curve unveränderlich dieselbe. Es versteht sich von selbst, daß durch diese Verlegung des Anfangspunktes die Curve an sich niemals eine Aenderung erfahren kann.

Das über die Veränderung des Anfangspunktes Gesagte gilt in ähnlichem Sinne für die Veränderung der Anfangsrichtung. Sie geschieht durch Einschiebung von $w' \pm a$ für w in die Function. Sollen Anfangspunkt und Anfangsrichtung zugleich verändert werden, so sind beide Einschiebungen zugleich vorzunehmen.

Durch diese auch sonst nöthige Auseinandersezzung wird die Vorstellung von dem Wesen einer ebenen Curve vollkommen lebendig geworden sein. Man wird nun gleich einstimmen, wenn gesagt wird, von allen Eigenschaften unterscheide sich der ächte Begriff einer Krummen dadurch, daß er die Abhängigkeit seiner Urbestandtheile, Länge und Drehung, für alle Werthe, die sie annehmen können, für den ganzen Verlauf der Linie ein für allemal, aber auch nichts weiter als dieses, bestimmt. Dasselbe ist bei keiner Eigenschaft der Fall, wie der folgende §. näher zeigt. Eine Eigenschaft kann also nie im eigentlichen, sondern nur im uneigentlichen Sinne, zu gewissen Zwecken, die Stelle des Begriffes vertreten.

§. 22.

Die Eigenschaften geometrischer Gebilde überhaupt zerfallen in zwei Haupt-Klassen, deren Un-

terscheidung wichtig ist. Eine Eigenschaft drückt nämlich entweder aus

1.) die gegenseitige Abhängigkeit von räumlichen Bestimmungen, die im Begriffe selbst liegen oder doch ein unmittelbares Erzeugniß desselben sind, ohne jedoch lediglich die den Begriff selbst vollständig basirenden zu sein; oder

2.) eine Relation unter Bestimmungen der eben genannten Art und anderweitigen durch den Begriff weder unmittelbar noch mittelbar gegebenen, also von außen hinzukommenden räumlichen Bestimmungen.

Die ersten Eigenschaften sind ihrem Wesen nach absolute, die anderen relative. Von den ersteren kommt jedem Gebilde eine endliche, von den letzteren eine unendliche Anzahl zu. Die ersteren sind in der Regel vor den relativen vollständig und in systematischer Folge abzuleiten; in der höheren Geometrie wenigstens kann dies ohne Uebelstände überall streng geschehen. In den absoluten Eigenschaften liegt eine in sich beschlossene, völlig befriedigende Erkenntniß des Objectes selbst als eines einzelnen, für sich bestehenden. Nachdem sie gewonnen ist, tritt das Bewußtsein der Dürftigkeit dieser Erkenntniß hervor und es regt sich das

höhere Bedürfniß, den Zusammenhang dieses Objectes mit den verwandten und überhaupt mit der unendlichen Zahl der übrigen einfachen und zusammengesetzten zu erkennen. Da erst hierdurch der einzelne Gegenstand in den großen Zusammenhang mit einem Theile von der Gesammtheit der wissenschaftlichen Begriffe und Urtheile, also mit der Wissenschaft tritt, so sind in so fern die relativen Eigenschaften höherer Natur, als die absoluten, und pflegen sich deshalb leicht vorzudrängen, ehe den absoluten ihr Recht geschehen. Beide Arten sind weiterer Unterabtheilungen aus verschiedenen Gesichtspunkten fähig. Besonders gilt dieses von den relativen. Die Willkühr in ihrer Aufnahme ist daher schwer zu beherrschen; sie erfordert große Wachsamkeit und einen viel umfassenden Ueberblick, vollständige, streng richtige Grundbegriffe und eine sachgemäße Methode. Es würde nicht schwer sein zu zeigen, daß in dieser Rücksicht weit größere Schwierigkeiten in der niederen als in der höheren Geometrie zu überwinden sind.

Diese Verschiedenheit beider Systeme von Eigenschaften geht durch die ganze Mathematik, ist aber in der Geometrie am auffallendsten und wichtigsten.

§. 23.

Zur Skizzirung eines allgemeinen Systemes der absoluten Eigenschaften ebener Curven bedarf man allgemein logischer und mathematischer Grundbegriffe, die daher in ihrem Zusammenhange hier entwickelt und aufgeführt werden müßten. Doch fürchte ich, den Leser, der nach seinem Geschmacke des Allgemeinen außerdem schon zur Genüge erhalten wird, durch ein solches Verfahren zu erschrecken, und stelle daher die Gestaltung in den Grundzügen aus freier Hand hin. Ueberdem ist es nicht schwer, die hierher gehörigen Ideen durch eine aufmerksame Vergleichung des Begriffes von dem Begriffe einer ebenen Curve (§. 21, Schluß) mit dem Begriffe einer absoluten Eigenschaft (§. 22, 1) aufzufinden und eine vorläufige Ueberzeugung von der Nothwendigkeit derselben und ihrer Anwendung sich zu verschaffen.

1.) Die erste Frage ist nach der Anzahl der gesonderten Reihen von Werthen, welche jeder der beiden veränderlichen Bestandtheile annehmen kann. Hierdurch bestimmt sich die Verzweigung der Linie in Rücksicht auf die Anzahl der Aeste; der Umfang des Begriffes wird im Allge-

meinen ausgemittelt. Hier kann sich gleich anschließen

2.) die Entscheidung darüber, ob ganze Zweige oder Haupttheile derselben entweder identisch sind oder im Allgemeinen ungleich.

3.) Untersuchung der nothwendigen Grenzen. a) Wie bedingen sich die Außengrenzen der Bestandtheile? Endlichkeit oder Unendlichkeit der Werthreihen, also des Laufes der Linie.

4.) Untersuchung der nothwendigen Grenzen. b) Wie bedingen sich etwaige Binnengrenzen der Bestandtheile, d. h. erreichen die Werthe des einen oder des andern ein Maximum oder ein Minimum? — Diese Untersuchung entscheidet über die Abwesenheit oder die Anwesenheit so wie über die Lage der Wendungspunkte, Spizzen und Schnäbel.

Anmerk. Die Ergebnisse dieser vier Untersuchungen bezeichnen den Lauf der Linie im Allgemeinen.

5.) Untersuchung willkührlicher Grenzen. Selbstausmessung der Linie, in Beziehung auf die Länge.

6.) Untersuchung willkührlicher Grenzen. Selbstausmessung der Linie in Beziehung auf die

Drehung. Hierher gehört das Anlegen von Tangenten. (Diese sonst so bedeutende Aufgabe reducirt sich hier auf das bloße Einschieben eines bestimmten Werthes für s in die gegebene Function.)

7.) Erörterungen über Concavität und Convexität, gestützt auf die Untersuchungen der letzten Nummer.

Anmerk. Die Beantwortung dieser ersten 7 Fragen geschieht durch eine Analyse der gegebenen Function selbst.

8.) Das Erzeugniß der Relation der Bestandtheile ist die Krümmung. Untersuchung der Krümmungsstärke aller Punkte.

9.) Nothwendige Grenzen der Krümmung, d. h. Punkte der größten und kleinsten Krümmung.

10.) Willkührliche Grenzen der Krümmung. An welchen Punkten hat die Curve diese oder jene gegebene Krümmung, ꝛc.

11.) Krümmungsgesetz, Gestalt der Curve, Metamorphose der Gestalt.

Anmerk. Die Beantwortung der vier letzten Fragen geschieht durch eine Analyse der Differentialgleichung der gegebenen Function.

12.) Endlich gehört zu den absoluten Eigenschaften die Gemeinschaftlichkeit oder Nicht-Gemeinschaftlichkeit von Punkten. Die Untersuchung darüber zerfällt in die Fragen über

a) Selbstbedeckung, wodurch geschlossene Linien, wie die Ellipse, Lemniscata ꝛc. entstehen.

b) Selbstschneidung, die Curve schneidet sich selbst, wodurch mehrfache Punkte, und, bei Wiederholung derselben, Netz- oder Knotenlinien gebildet werden.

c) Selbstberührung. Auch in diesem Falle findet immer ein mehrfacher Punkt Statt. (Mehrfache Punkte sind nur da, wo von einem Punkte wenigstens 4 Linien ausgehen.)

d) Selbstmeidung oder Nicht-Gemeinschaftlichkeit von Punkten. Die Linie kehrt niemals zu einem einmal durchlaufenen Punkte zurück. Hierunter die besonderen Fälle der Einschließung und Ausschließung, oder des Mangels Beider.

Zweites Kapitel.

Andeutungen über die Eintheilung der Curven selbst.

§. 24.

Es wird allgemein immer dringender das Bedürfniß eines sachgemäßeren Principes der Classificirung der Curven gefühlt. An dem bisher zu Grunde gelegten ist mancherlei auszusetzen. Man hat sich keine strenge Rechenschaft darüber gegeben, worin eigentlich das Kriterium für die (natürliche) Klasse, Gattung und Art einer Curve liegt, nach welchen Merkmalen man darüber entscheidet, ob zwei Curven zu einer und derselben oder zu einer andern Hauptreihe, Abtheilung und Unterabtheilung gehören. Die Unterscheidung der Curven in algebraische und transcendente und der letzteren nach ihren Graden ladet dazu ein, dieses auf sich beruhen zu lassen. So streng begrifflich auch diese letztere Classificirung ist, so gründet sie sich doch auf ein willkührlich ausgewähltes Merkmal, willkührlich in so fern, als diese Wahl nicht auf einer Erkenntniß des nothwendigen Zusammenhanges dieses Merkmales mit einem wissenschaftlich gerechtfertigten und dadurch völlig sachgemäßen Principe der Classificirung beruht.

Man hat gefunden, daß in einer Gleichung eines und desselben Grades verschiedene Curvenspecies enthalten sein können, und über diese Verschiedenheit nach dem durch die Auffassung der Function bedingten ganz verschiedenartigen Laufe der Curven geurtheilt, ohne eben nach gehörig geordneten und vollständig abgeleiteten Merkmalen über diese Verschiedenheit des Laufes zu entscheiden. Man theilte die Curven einer Gleichung nach denjenigen eben vorliegenden Verschiedenheiten ein, die sich als wesentliche bemerklich machten, ohne sich dabei auf ein System aller möglichen Verschiedenheiten zu beziehen. Es blieb daher auch als etwas Gleichgültiges bei der Discussion unerörtert, daß diese zunächst als Verschiedenheit der Species angesprochene Abweichung Verschiedenheit der Gattung sei. Parabel, Ellipse und Hyperbel sind z. B., wie bekannt, drei verschiedene Gattungen von Curven, und von jeder Gattung ist eine Species in der Gleichung des zweiten Grades enthalten. Der Grad der Gleichung entscheidet überhaupt nur darüber, zu welcher Species einer Gattung die entsprechende Curve gehört, nicht über die Gattung, die, wie man im Allgemeinen weiß, von der Form der Gleichung abhängt. Dessen ungeachtet hat man den Grad der

Function als obersten Eintheilungsgrund für die algebraischen Curven bisher beibehalten. Und freilich ist es gedeihlich für die Wissenschaft, sich an irgend einen Eintheilungsgrund zu halten, der sich durch ein wesentliches Moment aufdrängt, so lange nicht das eigentliche Princip gefunden, und als solches nachgewiesen ist.

Will man nach der Coordinaten-Methode die ebenen krummlinig begrenzten Flächen classificiren, so thut man das einzig Richtige. Aber man wollte die krummen Linien selbst danach eintheilen, und setzte dadurch das Object in eine künstliche widerstrebende Beziehung zu dem Principe. Hoffentlich giebt die weitere Entwickelung der in dieser Schrift verhandelten Methode Veranlassnng zu neuen das Ziel näher rückenden Arbeiten über diesen Gegenstand. Denn einerseits erleichtert diese Methode die Verständigung, weil nach ihr Begriff und Anschauung des Objects conform sind, andererseits wird das Bedürfniß hier noch dringender, zuerst, weil es durch den Geist der Methode überhaupt aufgeregt wird, und dann, weil eine Eintheilung der verschiedenartigen Eigenschaften der Curve und eine systematische Methode und Folge in ihrer Ableitung sich hier mehr als bei der Coordinaten-Methode

von augenscheinlicher Nothwendigkeit zeigt. Diese Classificirung der Eigenschaften steht aber in Beziehung mit der Classificirung der Curven selbst.

Die folgenden Andeutungen wollen nur als eine Hinweisung auf eine der beiden Hauptrichtungen gelten, welche man einschlagen kann. Indem sie die obersten Kriterien der Eintheilung zu geben suchen, wünschen sie den Gegenstand von neuem in Anregung zu bringen und weitere Verhandlungen darüber einzuleiten.

§. 25.

Wir beziehen die folgenden Erörterungen und Bestimmungen zunächst nur auf eine einzige Reihe von Werthen eines Bestandtheiles, verbunden mit nur einer entsprechenden Reihe des anderen, und gehen von einem beliebigen Werthe innerhalb der Reihe aus, die Reihe der Werthe nur nach einer Richtung, nicht auch nach der anderen verfolgend. Kurz, wir durchlaufen von einem beliebigen Punkte aus nur einen einzigen Curven-Arm. Denn unter dieselben allgemeinsten und obersten Beziehungen, worunter einer zu stellen ist, gehören alle.

Von den Elementen der Linie ist das eine willkührlich, das andere abhängig. Der willkührliche Bestandtheil, es werde die Länge oder die Drehung

dazu gewählt, kann nicht anders, als ohne Ende (ich sage nicht: unendlich groß) gedacht werden. Denn vom Anfangspunkte oder der Anfangsrichtung aus soll er jeden möglichen Werth erhalten. Läßt die Function den Wachsthum dieses Werthes in's unendlich Große zu, so ist dadurch der Bestandtheil ohne Ende. Kann er vermöge der Function nicht unendlich groß werden, so giebt es einen höchsten endlichen Werth für denselben. Dann lassen sich zwei Fälle denken. Entweder wird dieser höchste endliche Werth nie vollkommen erreicht, sondern es findet nur eine immer größere Annäherung an denselben Statt, der endliche Werth ist die Grenze, der sich der Bestandtheil ohne Ende nähert: dann ist der Bestandtheil wieder ohne Ende. Oder ein höchster endlicher Werth wird wirklich erreicht. In diesem interessanten Falle laufen die fernerhin möglichen Werthe vom Grenzpunkte oder der Grenzrichtung aus, wodurch ihrem weiteren Vordringen ein Ziel gesetzt wurde, in umgekehrter Folge wieder zurück. Man ist nämlich, wenn neue endliche Werthe für den Bestandtheil nicht mehr möglich sind, nicht allein berechtigt, die alten im Zurückschreiten zu wiederholen, so daß die vom Grenzpunkte an im Rückschritte hinzukommenden als negative Werthe die

früheren positiven zuerst zum Theil und endlich ganz wieder aufheben, um dann von neuem vorwärts zu schreiten, darauf abermals rückwärts und so im unendlichen Hin- und Wiederschwanken fort, — fordern auch dazu verpflichtet. Denn der Bestandtheil soll nicht allein alle mögliche Größenwerthe durchlaufen, sondern jeder von diesen Größenwerthen soll auch auf alle mögliche Arten gedacht werden, d. h. man soll sich ihn als aus Theilen, die in entgegengesetzter Beziehung stehen, zusammengesetzt vorstellen, und dieses so oft, als die Theile verschiedene Größe anzunehmen fähig sind, ohne den Gesammtwerth zu ändern, d. h. unendlich oft. (Z. B den Größenwerth 9 eines Bestandtheiles als 9, als 10 — 1, $10\frac{4}{5}$ — $1\frac{4}{5}$, 12 — 3, 18 — 9, 27 — 18, 1009 — 1000 u. s. f.) Denn geschieht dieses nicht, so ist der volle Umfang des in der Function liegenden Begriffes nicht ausgemessen, weil die Bestimmungen, die er als specielle zuließ, nicht alle Modificationen erhielten, deren sie fähig sind. Dieser volle Umfang der Function soll aber durchmessen werden, weil die Forderung ist, daß sie sowohl als das Raumgebild, das sie bezeichnet, vollständig und als Ganzes gedacht werde, welches ohne ihre gänzliche Erschöpfung nicht geschähe. Also auch im Falle der

endlichen Größe des Bestandtheiles ist dennoch seine Bewegung (ich wüßte hier keinen bezeichnenderen Ausdruck) ohne Ende. Ganz gleichgültig ist für unsere Betrachtung hierbei, ob bei der Wiederholung der alten Werthe auf die angegebene Weise, bei dem Rückschritte des Bestandtheiles, die Curve sich selbst deckt, oder einen von ihr noch unbetretenen Weg einschlägt. Im ersteren Falle würde sie als eine unsichtbar ohne Ende fortschreitende anzusprechen sein. Weiter unten ist als Beispiel eine im Vor- und Rückwärtsschreiten wechselnde Linie ausführlich betrachtet.

Da nun der willkührliche Bestandtheil schlechterdings ohne Ende ist, beide Bestandtheile aber gleichermaßen, sowohl die Länge als auch die Drehung, als willkührlich veränderliche Größen aufgefaßt werden können, so ist damit erwiesen, daß beide Bestandtheile der Curve, also auch sie selbst nothwendig ohne Ende sind. Und zwar die Curve von einem in ihrem Laufe gesetzten Anfangspunkte an nach einer Seite hinaus. Jede Krumme ist also eine nach allen Richtungen, die sie einschlägt, ohne Ende fortschreitende und ohne Ende sich drehende, d. h. ohne Ende gekrümmte Linie. Sie wird im einfach-

sten Falle der Anzahl ihrer Arme eine nach zwei Richtungen ohne Ende fortschreitende Linie sein.

§. 26.

I. Die Länge jedes Curven-Armes ist ohne Ende.

1.) Sie ist unendlich groß.

2.) Sie ist endlich groß.

a) Sie nähert sich der endlichen Größe ohne Ende.

b) Sie hebt die erreichte endliche Größe durch Entgegensetzung immer von neuem auf und besteht daher aus einer unendlichen Reihe positiver und negativer Stücke.

II. Die Drehung jedes Curven-Armes ist ohne Ende.

1.) Sie ist unendlich groß.

2.) Sie ist endlich groß.

a) Sie nähert sich der endlichen Größe ohne Ende.

b) Sie hebt die erreichte endliche Größe durch Entgegensetzung immer von neuem auf und besteht daher aus einer unendlichen Reihe positiver und negativer Wendungen.

Unläugbar sind die vorstehenden Bestimmungen der Drehung und Länge zu oberst entscheidend für die Natur eines Curvenarmes. Es kommt hierbei darauf an, welche Drehungsbestimmung sich mit irgend einer Längenbestimmung verbindet. Die Wesentlichkeit des Gesichtspunktes bestätigt auch der Erfolg. Denn man erhält auf den ersten Blick ohne Weiteres die Begriffe einer Mannigfaltigkeit von Curven-Gattungen. Schließt sich z. B. der Arm I, 1; II, 2, a an den Arm I, 2, a; II, 1, so hat man nach Hinzufügung eines zweiten identischen Zweiges eine Gattung von Halbspiralen ꝛc.

§. 27.

Die Krümmung der Linie, als das stetige Product der Abhängigkeit beider Bestandtheile, begründet dann eine weitere Eintheilung der Curven. Sie kann

I. an allen Punkten der Curve gleiche Stärke haben. (Der Kreis.)

II. in stetiger Veränderung begriffen sein (alle übrige Curven) und zwar, in Beziehung auf einen einzelnen Arm

a) vom Anfangspunkte aus stetig zunehmen,

b) vom Anfangspunkte aus stetig abnehmen,

c) abwechselnd zu- und abnehmen, welcher Fall weitere Unterabtheilungen zuläßt.

Diese einfachen Beziehungen (§. 26 und 27) sind es, worauf es bei einer sachgemäßen Classification der Curven zunächst ankommen möchte. Außerdem ist die Anzahl der Arme und ihre gegenseitige Lage, also auch der Grad der Gleichung, wichtig. Ob man diese Beziehungen nun, wie es hier geschehen, sogleich geometrisch auffassen, oder ob man von einer Classification der Functionen ausgehen will, ist an sich gleichgültig. Als Weg der Forschung ist das Letztere sicherer und im Verfolge unbedingt nothwendig, da man bindende Formen hat und in den Functionen jederzeit die ganzen Curven mit allen ihren Armen vorliegen. Aber am besten geht das Erstere, in der angedeuteten Art wenigstens, voran, weil die Rangordnung unter den Eigenschaften der Functionen am leichtesten und vollkommen überzeugend aus der Rangordnung der entsprechenden geometrischen Eigenschaften erkannt wird. Das wissenschaftliche Verfahren würde dann sein, die allgemeinen Formen der Functionen aufzusuchen, welche die verschiedenen geforderten Haupt-

eigenschaften besitzen, und nachdem so auf umgekehrte Weise die Functionen gewonnen, diese an die Spitze zu stellen.

Drittes Kapitel.

Betrachtung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Bestandtheilen, in Beziehung auf die Unterscheidung der darin enthaltenen geometrischen Objecte.

§. 28.

Die Gleichung des ersten Grades ist nicht allein dem Grade, sondern auch der Form nach die einfachste aller Gleichungen, und steht in so fern allen übrigen Functionen gegenüber. Sie muß deshalb jedenfalls und zuerst zur vollständigen Discussion kommen, man mag sich auch übrigens welches Classificationsprincipes man wolle bedienen.

§. 29.

Unter der Untersuchung einer zwischen Veränderlichen aufgestellten Gleichung in Bezug auf ihre

geometrische Bedeutung (unter der Discussion über sie) versteht man die Erforschung und Sonderung der verschiedenen räumlichen Bestimmungen (Punkt, Richtung, gerade Linie, Winkel, Curven verschiedener Art), welche die Gleichung ausdrückt, wenn sie nach und nach unter allen möglichen Bedingungen gedacht wird, denen sie unterworfen werden kann. Diese Bedingungen können in nichts Anderem, als in der verschiedenen Art und Weise bestehen, wie man in der Gleichung die allgemeinen (constanten) Coefficienten in Bezug auf die Relation ihrer Größe und ihrer Vorzeichen näher bestimmt, ohne besondere Zahlenwerthe für sie zu setzen.

§. 30.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades unter zwei Veränderlichen ist:

$$Aw + Bs + C = 0$$

1.) Für $A = 0$, $B = 0$ wird auch $C = 0$. Diese letztere Gleichung enthält keine Beziehung mehr zu Drehung und Fortschritt, ist an sich leer und ohne räumliche Bedeutung.

2.) Für $A = 0$, $C = 0$ entsteht $Bs = 0$, woraus $s = 0$, d. h. es werde kein Fortschritt gemacht.

Die Gleichung bezeichnet daher den Anfangspunkt.

3.) Für $B=0$, $C=0$, erhält man $Aw=0$, woraus $w=0$, d. h. es geschehe keine Drehung. Die Gleichung bezeichnet daher die Anfangsrichtung.

4.) Setzt man $A=0$, B und C endlich, so erfolgt $Bs+C=0$ und daraus $s=-\frac{C}{B}$. Der Fortschritt hat vermöge dieser Gleichung einen beständigen Werth, ohne mit einer Drehung verbunden zu sein; es ist also eine Gerade von gegebener Länge durch die Gleichung bezeichnet. Diese Gerade läuft vom Anfangspunkte aus in der positiven Richtung, wenn die Vorzeichen von B und C verschieden sind, in der negativen Richtung, wenn sie einander gleichen.

5.) Setzt man $B=0$, A und C endlich, so entsteht $Aw+C=0$, und daraus $w=-\frac{C}{A}$. Die Drehung ist von einer beständigen Größe, ohne mit einem Fortschritte verbunden zu sein; daher die Gleichung den ebenen Winkel darstellt. Dieser ist positiv, sobald die Vorzeichen von A und C verschieden sind, negativ im umgekehrten Falle.

6.) Für C=0, A und B von endlichem Werthe, wird die Gleichung $Aw + Bs = 0$, woraus $w = -\frac{B}{A}s$. Hier sind Drehung und Fortschritt zum ersten Male verbunden; diese Gleichung gehört daher einer krummen Linie an. Da für jeden Fortschritt die dazu gehörige Drehung durch Multiplication mit demselben Coefficienten erhalten wird, also Fortschritt und Drehung für jeden Curvenpunkt in demselben Verhältnisse stehen, dieses aber nach einem Beweise der Elementar-Geometrie *) bei dem Kreise der

*) Die Beziehung auf diesen Beweis ist keine nothwendige; es wäre hinreichend, der so definirten krummen Linie den Namen Kreis beizulegen. Da aber Jedermann die Curve, in welcher Fortschritt und Drehung stets in demselben Verhältnisse stehen, schon als den Kreis kennt, so wäre dieses Ziererei. Jener Beweis leitet aus einer Eigenschaft des Kreises, die er als Definition setzt, die eigentliche Definition, die er umgekehrt als Eigenschaft ansieht, auf folgende Weise ab: Jeder Drehungswinkel gleicht dem zu seinem Bogen gehörigen Centriwinkel. $\angle$ d z. B. (Fig. 7), der die Drehung des Bogens bc ausdrückt, wenn bd, dc Kreistangenten an den Punkten b und c sind, gleicht dem Centriwinkel a, weil der eine wie der andere den $\angle$ e zu 2 R ergänzt. Der $\angle$ d thut dies als Nebenwinkel von e, der $\angle$ a, weil die $\measuredangle$ a, b, e, c als Viereckwinkel 4 R betra-

Fall ist, so ist die krumme Linie der Gleichung der Kreis. — Sind die Vorzeichen von A und B verschieden, so erhält die Gleichung die Form $w = \frac{B}{A} s$, und es wird für jeden positiven Fortschritt auch die Drehung positiv (Bogen ad, Fig. 8), für jeden negativen negativ (Bogen af). Der Kreis liegt auf der einen (der rechten) Seite der Anfangsrichtung, die seine Tangente ist. — Sind hingegen A und B von gleichen Vorzeichen, so leidet die Gleichung $w = -\frac{B}{A} s$ keine Veränderung, und es verbindet sich nun dem positiven Fortschritte die negative Drehung (Bog. ah), dem negativen die positive (Bog. ag). Der Kreis liegt auf der andern (linken) Seite der Anfangsrichtung, d. i. seiner Tangente im Punkte a.

7.) Giebt man allen drei Coefficienten einen endlichen Werth, so bleibt die Gleichung in vollständiger Form und ihre Lösung in Beziehung auf beide Veränderliche ist

$$w = -\frac{B}{A} s - \frac{C}{A}, \quad s = -\frac{A}{B} w - \frac{C}{B}.$$

gen, b und c aber als Tangentialwinkel rechte sind. Die Centriwinkel stehen bekanntlich im geraden Verhältnisse der Bogen, folglich auch die Drehungswinkel.

Die möglichen Verschiedenheiten in der Annahme der Vorzeichen der Coefficienten geben diesen Ausdrücken für w oder s vier verschiedene Gestalten.

a) Sind A und B entgegengesetzt, A und C ebenfalls, so entstehen die Ausdrücke

$$w = \frac{B}{A} s + \frac{C}{A}, \quad s = \frac{A}{B} w - \frac{C}{B},$$

worin nunmehr die Coefficienten an sich positiv gedacht sind.

Für $s = 0$ (in der Gleichung für w) ist $w = \frac{C}{A}$, d. h. die Richtung, die die Curve im Anfangspunkte hat, weicht von der Anfangsrichtung um den Winkel $+\frac{C}{A}$ ab. Sei dieser Winkel bad (Fig. 9), wenn a den Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung bedeutet, so ist die Richtung der Curve im Anfangspunkte ad. Für $w = 0$ (in der Gleichung für s) ist $s = -\frac{C}{B}$, d. h. der Punkt, an welchem die Curve die Anfangsrichtung hat, liegt vom Anfangspunkte um $\frac{C}{B}$ rückwärts. Sei $\frac{C}{B} = af$, so hat in f die Curve die Anfangsrichtung fg = der Richtung ab.

Anfangspunkt und Anfangsrichtung fallen also an zwei verschiedene Punkte der Curve.

Da ferner vom Anfangspunkte der Fortschritte a und der Richtung (ad) an, die die Curve in

diesem Punkte hat, die Drehung dem Fortschritte stets proportional ist, indem das in der Gleichung für w den Drehungen hinzuzufügende $\frac{c}{A}$ immer durch $\angle$ bad hinweggenommen wird, so ist die Curve selbst wieder der Kreis, nur daß seine Lage eine andre als vorher (in 6) ist. Dort war die durch den Anfangspunkt gezogene Anfangsrichtung eine Tangente, hier ist sie eine Secante, gegen welche die Tangente des Anfangspunktes (ad), die den Kreis auf der einen (der rechten) Seite hat, positiv liegt. — Dasselbe Ergebniß liefert die Betrachtung der Gleichung für s. Hier bleibt der Fortschritt (vom Punkt f, Richtung fg an) stets der Drehung proportional, denn das von ersterem für irgend einen Werth von w abzuziehende $\frac{c}{B}$ wird immer durch das constante af zurückgerechnet, da der eigentliche Anfangspunkt a ist.

Um diese anschaulich abgeleitete Erkenntniß der Einerleiheit der vorliegenden Krummen mit der unter (6) auf gehörigem exacten Wege zu gewinnen, darf man nur die Anfangsrichtung in den Anfangspunkt der Curve verlegen. Da für $s = 0$, $w = \frac{c}{A}$, so ist zu diesem Zwecke $w' + \frac{c}{A}$ für w in die Gleichungen zu schieben. Dadurch erhält man

$$\frac{w' + \frac{C}{A} = \frac{B}{A} s + \frac{C}{A}}{w' = \frac{B}{A} s,}$$

und ferner

$$\frac{s = \frac{A}{B} w' + \frac{A.C}{B.A} - \frac{C}{B}}{s = \frac{A}{B} w';}$$

offenbar wieder die Functionen unter (6), wodurch die Einerleiheit bewiesen ist.

b) Sind A und B entgegengesetzt, A und C aber einstimmig, so erhalten die Gleichungen die Gestalt

$$w = \frac{B}{A} s - \frac{C}{A}, \quad s = \frac{A}{B} w + \frac{C}{B}.$$

Eine ähnliche Betrachtung, wie unter (a) lehrt, daß auch dieser Gleichung der Kreis angehört. Die durch den Anfangspunkt gezogene Anfangsrichtung ist ebenfalls eine Secante, gegen die aber die Tangente des Anfangspunktes, die den Kreis wieder auf derselben (der rechten) Seite hat, negativ liegt. (Fig. 10.)

c) Haben A und B gleiche Vorzeichen, A und C verschiedene, so lauten die Gleichungen so:

$$w = -\frac{B}{A} s + \frac{C}{A}, \quad s = -\frac{A}{B} w + \frac{C}{B}.$$

Sie drücken abermals einen Kreis aus; auch ist die durch den Anfangspunkt laufende Anfangsrichtung wieder eine Secante. Gegen sie hat die Tangente

des Anfangspunktes, die den Kreis nun auf der andern (der linken) Seite hat, eine positive Lage (Fig. 11).

d) Giebt man endlich sowohl A und B als A und C gleiche Vorzeichen, so erhält man die Lösung der allgemeinen Gleichung des ersten Grades in ursprünglicher Form

$$w = -\frac{B}{A}s - \frac{C}{A},\quad s = -\frac{A}{B}w - \frac{C}{B}.$$

Sie bezeichnet einen Kreis in der letzten möglichen Lage. Die durch den Anfangspunkt gezogene Anfangsrichtung ist eine Secante, gegen welche die Tangente des Anfangspunktes, die den Kreis auf der entgegengesetzten (der linken) Seite hat, negativ liegt (Fig. 12).

§. 31.

In der regelmäßigen Abstufung und stetigen Reihe der räumlichen Bestimmungen, die aus der allgemeinen Gleichung des ersten Grades hervorgingen, indem sie allen möglichen nach streng methodischer Folge geordneten Bedingungen unterworfen wurde, spricht sich sogleich die vollkommene Angemessenheit der ursprünglichen Methode zu ihrem Objecte, ihre Harmonie mit demselben aus. Nach dem Nichts tritt zuerst das Geringste, der Anfangspunkt und

in seinem Gefolge die Anfangsrichtung hervor, worauf sich dann die Elemente der Curve, die Gerade und der ebene Winkel, entwickeln. Jetzt erst stellt sich ihre erste Verbindung ein, die einfachste Curve selbst in der einfachsten Lage, woran sich zuletzt noch die übrigen möglichen Lagen derselben in geordneter Folge schließen. Die allgemeine Gleichung des ersten Grades entwickelt also einen viel größeren Reichthum an geometrischen Bestimmungen, als nach der Coordinaten-Methode, die ihre Disharmonie mit der Curve als solcher auch auf dieser untersten Stufe dadurch verräth, daß nicht der einfachsten Gleichung auch die einfachste krumme Linie entspricht, wie bei der neuen Methode, welcher letzteren deshalb die Kraft jener, die Gerade selbst und zwar als bloßes Element der Curve zu bezeichnen, nicht mangelt.

§. 32.

Die Discussion über die allgemeine Gleichung des zweiten Grades gehört, streng genommen, nur in einen Wissenschaftbau, der den Grad der Gleichung zum Principe der Classification macht, und daher die verschiedenen Functionen nach der Folge ihres Grades auftreten und ihrer Curven sich entledigen läßt. Ein natürliches System der Wissen-

schaft müßte freilich anders und zwar synthetisch verfahren. Es würde mit der Untersuchung der allgemeinsten Eigenschaften, derjenigen, welche ganzen Hauptklassen von Curven zukommen, den Anfang zu machen, darauf die Eigenschaften der Gattungen, und endlich die der Arten abzuleiten haben. Unsere Absicht an diesem Orte ist ein solcher eben so wünschenswerther als schwieriger Bau nicht; doch überheben wir hier billig den Leser der genannten Discussion, die er in deutschen und ausländischen Lehrbüchern in den verschiedensten Formen finden kann, weil sie für den Anfang zu sehr von dem Eigenthümlichen der neuen Methode ab in's rein Algebraische führt. Statt dessen nehmen wir die cursorische Untersuchung einer Mannigfaltigkeit einzelner einfacher Curven vor, nachdem die nöthigsten allgemeinen Methoden abgehandelt sein werden. Nur einige wenige Bemerkungen vorher in Beziehung auf die in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades enthaltenen krummen Linien.

§. 33.

Aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen

$$(1)\quad Aw^2 + Bws + Cs^2 + Dw + Es + F = 0$$

erhält man durch Auflösung

$$(2)\ w = -\frac{Bs+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)s^2+2(BD-2AE)s+(D^2-4AF)},$$

$$(3)\ s = -\frac{Bw+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)w^2+2(BE-2CD)w+(E^2-4CF)}.$$

In diesen Functionen (2) und (3) können die allgemeinen Coefficienten nicht nur alle mögliche positive und negative Werthe erhalten, sondern auch mit Ausnahme von A und C annullirt werden. Setzt man nämlich die letzteren beide zugleich oder je einen von ihnen $=0$, so erhält man, da sie Divisoren sind, aus (2) und (3) unendlich große oder unbestimmte Werthe für w und s oder für eins von ihnen. Diese Werthe sind offenbar falsch. Für diese Bedingungen kann man also die Functionen ohne vorhergegangene Umformung nicht benutzen. Der Grund dieser Ausnahme liegt darin, daß die Voraussetzung $A=0$, $C=0$ der Gleichung (1) die Quadrate der Veränderlichen raubt, und dann die Lösung durch den Mangel der Wurzelausziehung eine ganz andere Form erhält. Daher könnte man leicht in den Irrthum fallen, die der Gleichung (1) unter der Voraussetzung $A=0$, $C=0$ angehörige Curve für eine des ersten Grades anzusehen. Aber sie bleibt nichts desto weniger eine quadratische, da noch ein Glied in ihr zurück ist, das zwei Dimensionen der Ver-

änderlichen enthält. Auch bezeugt es die Form der Wurzel selbst. Für $A=0$, $C=0$, entsteht aus (1)

$$(4)\ Bws + Dw + Es + F = 0$$

und daraus

$$(5)\ w = \frac{-Es-F}{Bs+D},\quad (6)\ s = \frac{-Dw-F}{Bw+E}.$$

Hier ist die Division einer einfachen Function der Veränderlichen durch eine zweite in ihr nicht aufgehende einfache Function ebenderselben Veränderlichen gefordert: eine Operation, die in Gleichungen mit zwei Veränderlichen bekanntlich auf derselben Höhe mit der Quadrat-Wurzelausziehung steht. Uebrigens bewährt hinterher die Linie selbst, die dieser Gleichung angehört, durch ihr Verhältniß zu einer gewissen Art von Linien des zweiten Grades die Richtigkeit der Ansicht. Für die Veränderlichen als Coordinaten gilt dasselbe. Alle 3 Bedingungen geben Hyperbeln; für den einfachsten Fall sind die Coordinaten-Axen die Asymptoten selbst. Dem entsprechend lassen sich alle drei Bedingungen durch Transformation der Coordinaten den übrigen Fällen (A und C von endlichem Werthe) unterordnen. Man darf also diese letzte Beschränkung für (2) und (3) machen, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu gefährden.

(2) $w = -\frac{Bs+D}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(B^2-4AC)s^2+2(BD-2AE)s+(D^2-4AF)}$,

(3) $s = -\frac{Bw+E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2-4AC)w^2+2(BE-2CD)w+(E^2-4CF)}$.

In diesen Functionen (2) und (3) können die allgemeinen Coefficienten nicht nur alle mögliche positive und negative Werthe erhalten, sondern auch mit Ausnahme von A und C annullirt werden. Setzt man nämlich die letzteren beide zugleich oder je einen von ihnen $=0$, so erhält man, da sie Divisoren sind, aus (2) und (3) unendlich große oder unbestimmte Werthe für w und s oder für eins von ihnen. Diese Werthe sind offenbar falsch. Für diese Bedingungen kann man also die Functionen ohne vorhergegangene Umformung nicht benutzen. Der Grund dieser Ausnahme liegt darin, daß die Voraussetzung $A=0$, $C=0$ der Gleichung (1) die Quadrate der Veränderlichen raubt, und dann die Lösung durch den Mangel der Wurzelausziehung eine ganz andere Form erhält. Daher könnte man leicht in den Irrthum fallen, die der Gleichung (1) unter der Voraussetzung $A=0$, $C=0$ angehörige Curve für eine des ersten Grades anzusehen. Aber sie bleibt nichts desto weniger eine quadratische, da noch ein Glied in ihr zurück ist, das zwei Dimensionen der Ver-

änderlichen enthält. Auch bezeugt es die Form der Wurzel selbst. Für $A=0$, $C=0$, entsteht aus (1)

$$(4)\quad Bws + Dw + Es + F = 0$$

und daraus

$$(5)\quad w = \frac{-Es-F}{Bs+D},\quad (6)\quad s = \frac{-Dw-F}{Bw+E}.$$

Hier ist die Division einer einfachen Function der Veränderlichen durch eine zweite in ihr nicht aufgehende einfache Function ebenderselben Veränderlichen gefordert: eine Operation, die in Gleichungen mit zwei Veränderlichen bekanntlich auf derselben Höhe mit der Quadrat-Wurzelausziehung steht. Uebrigens bewährt hinterher die Linie selbst, die dieser Gleichung angehört, durch ihr Verhältniß zu einer gewissen Art von Linien des zweiten Grades die Richtigkeit der Ansicht. Für die Veränderlichen als Coordinaten gilt dasselbe. Alle 3 Bedingungen geben Hyperbeln; für den einfachsten Fall sind die Coordinaten-Axen die Asymptoten selbst. Dem entsprechend lassen sich alle drei Bedingungen durch Transformation der Coordinaten den übrigen Fällen (A und C von endlichem Werthe) unterordnen. Man darf also diese letzte Beschränkung für (2) und (3) machen, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu gefährden.

§. 34.

Dieses vorausgesetzt, so umfaßt, wie bekannt, jede der allgemeinen Functionen (2) und (3) außer der Gleichung des 1. Grades drei ihrer Art nach von einander verschiedene specielle Functionen, denen nach der Coordinaten-Methode die Parabel, Ellipse und Hyperbel entsprechen. Dessen ungeachtet darf es nicht befremden, wenn sich nach der ursprünglichen Methode mehr als 3 Curvenspecies aus der Gl. des 2. Grades entwickeln. Zur Erläuterung von einer Seite ist die Einführung eines einfachen Begriffes, der der Wechselcurven, nothwendig. So sollen zwei Krumme genannt werden, wenn in der einen die Länge genau ebenso von der Drehung, als in der andern die Drehung von der Länge abhängt. Man bildet also aus der Gleichung einer Curve die der Wechselkrummen durch bloße Vertauschung der Zeichen für beide Veränderliche. So sind $As = \frac{B.\log w}{w}$ und $Aw = \frac{B.\log s}{s}$, $Ax^2 + Bx = y^2$ und $Ay^2 + By = x^2$ Gleichungen für Wechselcurven, nur daß im letzteren Falle der Begriff erweitert und auf Abcisse und Ordinate als Veränderliche ausgedehnt ist. Man sieht sogleich, daß nach dem Coordinatensysteme die Wechselcurve der Para-

bel wieder völlig dieselbe Linie ist, und es sich ebenso mit Ellipse und Hyperbel verhält. Denn wenn die Abcisse die Rolle der Ordinate und umgekehrt übernimmt, so hat dieses in einigen Fällen gar keinen, in den übrigen keinen weiteren Erfolg, als daß die Ordinaten die Curve an einer anderen z. B. der convexen statt der concaven Seite treffen. Anders nach unserer Methode. Hier kann es zwar auch vorkommen, daß Wechselcurven identisch sind, aber es ist nicht nothwendig. Die Bedingung dafür zeigt sogleich der Kreis, auch Gl. (5) und (6), wo der Fall sich findet. In den meisten Fällen haben beide Wechselcurven entgegengesetzte Beschaffenheit. Diese Relation pflegt interessant zu sein und verdient später Gegenstand besonderer Betrachtungen zu werden. Der Grund der Verschiedenheit der Wechselkrummen nach der neuen Methode, wodurch die Anzahl der Curven für dieselbe Anzahl von Gleichungen sich steigert, liegt in der gänzlichen Verschiedenartigkeit der Veränderlichen und ihrer Vereinigung zu dem Producte des Begriffes oder der Bildung der Curve selbst.

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Methoden zur Ableitung absoluter Eigenschaften der ebenen Curven.

Erstes Kapitel.

Methode, die Uebergangspunkte, ihre Art, Anzahl und Lage zu finden

§. 35.

Schon oben (§. 10, 13 und 14) wurden die Uebergangspunkte characterisirt. Wir bedürfen zur Begründung ihrer Untersuchung einer übersichtlichen Zusammenstellung der hierher gehörigen Begriffsbestimmungen.

1.) Bleibt in einem Punkte der Curve sowohl ihr Fortschritt als ihre Drehung unentgegengesetzt, also positiv, wenn sie von irgend einem anderen Punkte aus positiv, negativ, wenn sie

negativ war, so soll ein solcher Punkt ein gemeiner Curven-Punkt heißen. (Fig. 3, c.)

2.) Erhält sich in einem Punkte zwar der Fortschritt unentgegengesetzt, geht aber die Drehung in ihre Entgegensetzung über, d. h. wendet sich die Curve negativ, wenn sie bisher positiv sich drehte und umgekehrt, so erhält ein solcher Punkt den Namen eines Wendungspunktes. (Fig. 4, c.)

3.) Wenn umgekehrt die Länge eine der bisherigen entgegengesetzte wird, die Drehung aber unentgegengesetzt fortgeht, so nennt man den Punkt der Curve, in welchem dieses geschieht, eine Spitze. (Fig. 5, c.)

4.) Ein Schnabel endlich heißt derjenige Punkt einer Krummen, in welchem Beide, Fortschritt und Drehung, den entgegengesetzten Weg zu verfolgen anfangen. (Fig. 6, c.)

Spitze und Schnabel haben den gemeinschaftlichen Namen der Rückkehrpunkte erhalten; das Wesentliche ihrer Gemeinschaft besteht darin, daß in beiden die Länge in's Entgegengesetzte übergeht oder die Curve von dem bisherigen Wege zurückkehrt. Alle 3 aber, Wendungspunkt, Spitze und Schnabel sind am schicklichsten mit dem allgemeinen Aus-

drucke Uebergangspunkte zu bezeichnen, weil in ihnen einer der Bestandtheile oder beide in die Entgegensetzung übergehen und weil eine alle drei zugleich umfassende Bezeichnung sie sogleich von merkwürdigen Punkten anderer Art unterscheidet, z. B. von den mehrfachen Punkten, mit denen sie, vermöge einer gänzlichen Verkennung ihrer Natur, von einigen Schriftstellern in eine Kategorie gestellt worden sind.

§. 36.

Die Definition der vier eigenthümlichen Curvenpunkte ist in Beziehung auf irgend einen anderen Punkt der Curve und irgend eine andere Richtung erfolgt, als die ist, welche sie in den 4 Punkten selbst hat. Daraus kann man leicht ableiten, welche Bedingungen Statt finden, wenn man sich in die 4 Curvenpunkte selbst versetzt. Es sind genau die entgegengesetzten. Man denke sich, in Beziehung auf den Fortschritt, nur eine gerade Linie und darin 3 Punkte, in der Folge a, b, c. Vom Punkte b aus läuft die Linie nach a und c in entgegengesetzten Richtungen, vom Punkte a aus aber nach b und hindurch nach c in einer und derselben, in unentgegengesetzter Richtung. Versetzt man sich also

in den Punkt b selbst, so findet von ihm aus ein entgegengesetzter Fortschritt Statt, versetzt man sich dagegen in einen andern, den Punkt a, so bleibt der Fortschritt nach c hin in b unentgegengesetzt. Eben das gilt für die Drehung. Man denke sich von einem Scheitelpunkte ausgehend 3 verschiedene Schenkel a, b, c, eines ebenen Winkels. Von der Richtung b aus muß man sich nach a und c entgegengesetzt drehen, von a aus aber nach c durch b in stets unentgegengesetztem Fortgange.

Denkt man sich also in den untersuchten Punkten selbst, und nimmt dieselben Bedingungen, die man für diese Punkte unter der Voraussetzung nahm, daß sie im weiteren Laufe der Curve lägen, so folgen die 4 Punkte in umgekehrter Ordnung. Oder umgekehrt, nimmt man die entgegengesetzten Bedingungen, so folgen sie in derselben Ordnung.

1.) Ein Punkt, von welchem aus sowohl Fortschritt als Drehung entgegengesetzt werden, ist ein gemeiner Curven-Punkt.

2.) Ein Punkt, von welchem aus der Fortschritt entgegengesetzt wird, die Drehung aber nicht, ist ein Wendungspunkt.

3.) Ein Punkt, von welchem aus die Drehung

entgegengesetzt wird, der Fortschritt aber nicht, ist eine Spitze.

4.) Ein Punkt, von welchem aus sowohl Drehung als Fortschritt unentgegengesetzt laufen, ist ein Schnabel.

§. 37.

Um zu entscheiden, ob die sämmtlichen Punkte einer Curve gemeine sind oder ob sich Uebergangspunkte unter ihnen finden, muß also das Verhalten der Gleichung für jeden der beiden Bestandtheile in zweifacher Beziehung untersucht werden:

1.) Für die Länge.

a) Man versetzt sich durch die Annahme $s = 0$ in den Anfangspunkt und untersucht, ob von da an für s bloß einstimmige (bloß positive oder bloß negative) Werthe, oder ob entgegengesetzte möglich sind. Dadurch wird über die Natur des Anfangspunktes entschieden. Im ersteren Falle ist er in Rücksicht auf den Fortschritt ein Uebergangspunkt, d. i. ein Rückkehrpunkt, im zweiten nicht. (§. 36, 3. und 4.) Es versteht sich, daß von je 2 zusammengehörigen Werthreihen oder Curven-

Armen immer dasselbe Kriterium gilt, wenn die Linie vielarmig sein sollte.

b) Man erforscht auf die §. 38 angegebene Weise, ob jeder vorhandene Arm der Linie verläuft, ohne wieder rückgängig zu werden, d. h. in den entgegengesetzten Fortschritt überzuschlagen, oder nicht. Dadurch wird über alle Punkte, außer über den Anfangspunkt, entschieden. Im ersteren Falle ist unter ihnen kein Rückkehrpunkt, im letzteren Falle sind deren eben so viele vorhanden, als Uebergänge in den entgegengesetzten Fortschritt vorkommen. (§. 35, 3. und 4.)

2.) Für die Drehung.

a) Von $w = 0$ oder der Anfangsrichtung aus sind für w. entweder nur einstimmige Werthe möglich: dann ist der Punkt der Anfangsrichtung ein Uebergangspunkt in Rücksicht auf die Drehung, d. i. ein Wendungspunkt oder ein Schnabel; oder es sind entgegengesetzte Werthe möglich, dann ist er keines von beiden. (§. 36. 2. und 4.) Finden sich mehr als 2 Reihen von Werthen für w vor, so gilt dasselbe, was unter 1., a bemerkt ist.

b) Springt die bisher positive oder negative Drehung eines Armes wieder in die entgegen-

gesetzte über, so finden sich eben so viele Uebergangspunkte in Bezug auf die Drehung vor, als solche Uebergänge erfolgen. Im umgekehrten Falle sind solche Punkte im Laufe der Curve nicht vorhanden. (§. 35, 2. u. 4.)

Man muß hier wie bei 1, b wohl erwägen, daß solche Entgegensetzungen der Bestandtheile geometrisch vorkommen, ohne daß für die Punkte zunächst diesseit und jenseit des Ueberganges die Werthe in der Gleichung entgegengesetzte Vorzeichen erhielten. (Siehe folgenden §.)

§. 38.

Die Fragen 1., a und 2., a beantworten sich aus der Gleichung ohne Weiteres auf die gewöhnliche Weise; eine Reihe positiver oder eine Reihe negativer Werthe für den untersuchten Bestandtheil hat von 0 aus Statt, wenn der andere Bestandtheil für diese Voraussetzung reelle Werthe erhält. Giebt $s = 0$ auch $w = 0$, so fallen beide kleine Untersuchungen in eine einzige zusammen. Da dieser Umstand auch in anderer Rücksicht für die Analyse der Gleichung erleichternd ist, so thut man in der Regel wohl, ihn schon hier durch die §. 21

näher bezeichnete Umwandlung der Function herbeizuführen, wenn er sich nicht schon finden sollte.

Was die Beantwortung der Fragen 1., b und 2., b aus der Gleichung betrifft, so giebt man ihr für die erstere, wo s in Frage steht, die Form $w = f(s)$, für die letztere, wo w zu untersuchen ist, die Form $s = \varphi(w)$. Soll nun der fragliche Bestandtheil im Laufe der Curve geometrisch in das Entgegengesetzte übergehen, so setzt dieses voraus, daß höhere einstimmige Werthe in der Gleichung nicht mehr möglich sind, und die weiter erfolgenden einstimmigen wieder kleiner angenommen werden müssen oder durch angenommene höhere Werthe für den anderen Bestandtheil wieder kleiner ausfallen, also in Beziehung auf die früher höheren Werthe des untersuchten Bestandtheiles eine rückgängige Bewegung desselben fordern. Es muß demnach einen höchsten Werth für den Bestandtheil geben, einen positiven, sofern die untersuchte Reihe positiv, einen negativen, sofern sie negativ war, wenn ein Uebergang in die Entgegensetzung vorkommen soll. Man erhält dieses Maximum für s, indem man durch die gewöhnlichen Mittel aus der Function $w = f(s)$ findet, welches der höchste Werth für s ist, der einen möglichen

Werth für w giebt. Das Maximum für w ergiebt die Function $s = \varphi(w)$ auf ähnliche Art. Der für das Maximum gefundene Werth giebt in beiden Fällen die Lage des Uebergangspunktes an. Er kann sich unendlich oft wiederholen, unter leicht zu übersehenden Bedingungen.

Beispiele zu diesem einfachen Verfahren finden sich im folgenden Abschnitte.

Zweites Kapitel.

Methode, die Stärke der Krümmung einer Curve an jedem beliebigen Punkte oder das Gesetz der Krümmungsveränderung zu finden. Berechnung der Punkte der stärksten und schwächsten Krümmung, des Krümmungskreises und Krümmungshalbmessers. Bedingungen der Unwandelbarkeit der Gestalt einer Curve. Die Metamorphose der Gestalt.

§. 39.

Krümmung und Drehung dürfen nicht verwechselt werden. Die letztere bedeutet den stetigen Ue-

bergang der Richtung in eine andere, wobei unentschieden bleibt, ob damit ein Fortschritt (eine Längen- oder Flächen-Ausdehnung) verbunden ist oder nicht; Krümmung dagegen ist mit Ausdehnung verbundene Drehung.

Unter der Krümmung einer Linie versteht man demgemäß ihre beständige Abweichung von der während ihres Laufes angenommenen Richtung. Ist für dieselbe Länge eines Curvenstückes die Richtungsveränderung, d. i. der Winkel, den die Richtungslinien seiner Grenzpunkte bilden, größer oder kleiner, so nennt man die Krümmung dieses Bogens, im Ganzen genommen, stärker oder schwächer. Von zwei gleich langen Bogen ist also der am stärksten gekrümmt, dessen Richtungslinien den größten Winkel mit einander bilden. Ist z. B. der Bogen gk = Bog. kp (Fig. 1) und dabei $\angle$ n größer als $\angle$ m, so ist kp stärker gekrümmt, als gk. kp selbst aber kann an verschiedenen Stellen verschieden stark gekrümmt sein; theile ich diesen Bogen z. B. in 2 gleiche Theile, so ist in der Figur der Theil tp stärker gekrümmt, als kt. Aehnliches kann ferner eintreten, wenn tp wieder in kleinere Bogen zerlegt wird. Kurz, die kleinsten Theilchen einer Krummen können eine verschiedene Krüm-

mungsstärke haben, und man sieht sich zuletzt gezwungen, sich auf einen Punkt im Laufe der Curve zu beschränken und ihr an diesem irgend einen bestimmten Krümmungsgrad beizulegen. — Zur Bestimmung desselben führen folgende Betrachtungen.

§. 40.

Es sei für eine Krumme die gegenseitige Abhängigkeit der Länge und der Richtungsveränderung oder Drehung, wenn man diese vom Anfangspunkte und der Anfangsrichtung an rechnet, d. h. es sei die Gleichung der Curve gegeben. Man wünscht zu wissen, auf welche Weise die Länge eines beliebigen im Laufe der Curve genommenen Bogens von seiner Drehung abhängt und umgekehrt. Sei z. B. a (Fig. 1) der Anfangspunkt, so kennt man das erwähnte Gesetz für jeden von a aus gerechneten beliebigen Bogen z. B. für ag; man will dasselbe Gesetz für einen endlichen Zuwachs dieses Bogens z. B. für gk kennen lernen.

Die Untersuchung leitet sich am besten durch ein Beispiel ein. Die gegebene Gleichung sei $s^2 = w$. Es wachse nun der Bogen um das Stück Δs, so wächst auch die Drehung um eine gewisse Größe, die durch Δw bezeichnet werde. Setzt man also

für s, $s + \Delta s$, für w, $w + \Delta w$, so wird die Gleichung

$$s^2 + 2s \cdot \Delta s + (\Delta s)^2 = w + \Delta w.$$

Wird hiervon die anfängliche Gleichung $s^2 = w$ wieder abgezogen, so erhält man das gewünschte Abhängigkeitsgesetz

$$2s \cdot \Delta s + (\Delta s)^2 = \Delta w,$$

oder anders ausgedrückt:

$$2s + \Delta s = \frac{\Delta w}{\Delta s}.$$

§. 41.

Je kleiner in der letzten Gleichung Δs genommen wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ dem Werthe $2s$. Läßt man Δs unendlich abnehmen, so nähert sich also $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ unendlich dem Werthe $2s$ und ist daher ihm gleich zu setzen. Δs als eine unendlich kleine Größe verschwindet gegen $2s$ als eine endliche; aber Δs verschwindet nicht gegen Δw, weil auch dieses vermöge der Abhängigkeit beider mit Δw zugleich unendlich klein wird. $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ hat also dann die endliche Größe $2s$. — Für einen solchen Fall einer unendlichen Abnahme des Δs, Δw bezeichnet man diese Größen-Momente bekanntlich durch ds, dw und nennt sie die Differentiale

von s und w. Unsere obige Gleichung verwandelt sich daher unter Voraussetzung jener unendlichen Abnahme in diese

$$2s \, . \, ds = dw,$$

d. i. in die Differentialgleichung der anfänglichen, und wie in diesem Beispiele, so drückt überhaupt die Differential-Gleichung der Curve die Abhängigkeit aus, in welcher Fortschritt und Drehung eines unendlich kleinen Bogens stehen.

§. 42.

Aus der letzten Gleichung ist

$$2s = \frac{dw}{ds}.$$

Der Werth des Differential-Quotienten $\frac{dw}{ds}$, hier $2s$, heiße allgemein c.

Es fragt sich, welche geometrische Bedeutung dieser Differential-Quotient, oder, wie man ihn gewöhnlich nennt, das Differential-Verhältniß habe.

Beträgt für den Bogen Δs die Drehung Δw, so ist für die Einheit der Bogenlänge die Drehung $\frac{\Delta w}{\Delta s}$, wenn man sich die vielleicht ungleichmäßig vertheilte Drehung Δw über den Bogen Δs gleichmäßig vertheilt denkt. $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ giebt also die Drehungsgröße für den Bogen $= 1$, bei gleichmäßiger Ver-

theilung derselben über Δ w. Es betrage z. B. für einen ungleichmäßig gekrümmten Bogen = 7 die Drehung 21°, so wäre $\frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{21^\circ}{7} = 3^\circ$, d. h. die Curve hat zwischen den beiden Grenzpunkten des Bogens = 7 eine Drehung, die für den Bogen = 1 im Durchschnitt 3° beträgt. Läßt man nun Δ s und mit ihm Δ w unendlich abnehmen, so daß keinem von beiden mehr eine endliche Größe beigelegt werden kann, d. h. läßt man sie zu ds und dw werden, so können diese beiden an und für sich verschwindenden Größen-Momente doch ein endliches Verhältniß zu einander haben, wie schon oben ein Beispiel zeigte, wo $\frac{dw}{ds} = 2s$ gefunden wurde. Noch ein anderes Beispiel stehe hier zur Erläuterung. Es sei ein Bogen des Kreises = 20 und seine Drehung 40°. Da der Kreis die gleichmäßig gekrümmte Linie ist, so beträgt die Drehung für jede Bogen-Einheit $\frac{40}{20}^\circ = 2^\circ$. Läßt man nun die Bogenlänge und mit ihr die Drehung, nach Maaßgabe des Abhängigkeitgesetzes beider, also hier in gleichem Verhältnisse, abnehmen, z. B. 4 und 8° werden, so ergiebt dieses die Drehungsgröße für den Bogen = 1 nothwendig wie vorher, $\frac{8}{4}^\circ = 2^\circ$. Werden auch beide Bestandtheile äußerst klein z. B. $\frac{1}{10000}$ und entsprechend $\frac{2}{10000}^\circ$: die Drehungsgröße für die Ein-

heit geht aus ihrem Verhältniß doch immer = 2° hervor. Mag nun auch der Bogen so wie seine Drehung unendlich abnehmen, d. h. sich der Grenze 0 unendlich nähern, ihr Verhältniß bleibt dasselbe, und wir werden sagen müssen, die Curve ist selbst für einen unendlich kleinen Bogen oder an einem Punkte so gekrümmt, wie ein Bogen = 1, über den 2° Drehung gleichmäßig vertheilt sind. — Es ist übrigens nur in diesem einzigen Beispiele, bei dem Kreise, der Fall, daß die Drehungsgröße für die Längen-Einheit des Bogens dieselbe (wie hier z. B. 2°) bleibt, man mag sie für einen größeren oder kleineren Bogen berechnen; in allen übrigen Fällen nähert sich diese Drehungsgröße unendlich einer bestimmten Zahl, wie hier 2°, und wird erst vollkommen solcher Grenzzahl gleich, wenn man den Bogen unendlich klein oder als Punkt denkt. Genug, daß unser Beispiel zeigt, wie $\frac{dw}{ds}$ eine endliche Größe sein kann.

Läßt man den Bogen und mit ihm die Drehung unendlich abnehmen, oder ersteren zu einem bloßen Punkte, letzteren zu einer bloßen einzelnen Richtung werden, so ist es dadurch erst möglich, von einer völlig bestimmten Stärke der Krümmung zu reden. Denn ist der Bogen noch endlich, wenn

auch äußerst klein, so ist er, bei ungleichmäßiger Krümmung, doch an verschiedenen Punkten verschieden stark gekrümmt, und man konnte nur behaupten, seine Krümmung im Ganzen genommen, sei so, daß sie bei gleichmäßiger Vertheilung über den äußerst kleinen Bogen verhältnißmäßig für die Längen-Einheit, nach welcher der Bogen gemessen, so und so viel Grad betragen würde. An einem einzigen Punkte aber ist die Krümmungsstärke nur eine einzige, vollkommen bestimmte.

Das Differential-Verhältniß $\frac{dw}{ds}$ bestimmt also die Drehungsgröße, die, über die Länge $= 1$ gleichmäßig vertheilt, einen Kreisbogen gibt, dessen Krümmung gleich der Krümmung der Curve an dem Punkte ist, für welchen das Differential-Verhältniß berechnet worden. Mit andern Worten: dieses sagt aus, die Curve habe an dem betreffenden Punkte eine genau so starke Krümmung, wie ein Kreisbogen $= 1$, dessen Drehungsgröße $= c$, dem Werthe des Differential-Quotienten, ist. $\frac{dw}{ds}$ bezeichnet also, wie ausdrücklich zu merken, eine absolute Drehungsgröße, keine bloße Verhältnißzahl, und man kann also eigentlich hier nicht von einem Differential-Verhältniß, sondern nur von einem Differential-Quotienten reden.

§. 43.

Die Bedeutung des umgekehrten Differential-Quotienten, $\frac{ds}{dw}$, liegt nun ebenfalls vor. $\frac{\Delta s}{\Delta w}$ würde die durchschnittliche Ausdehnung eines Bogens angeben, dessen Wendung die Drehungseinheit beträgt, daher $\frac{ds}{dw}$ die absolute Länge eines Bogens bei einer gleichmäßig darüber verbreiteten Drehungsgröße = 1, dessen Krümmung = der Krümmung der Curve an dem fraglichen Punkte ist.

Zur Aufstellung des Gesetzes, das die Veränderung der Krümmung bestimmt, und zur Vergleichung der Krümmungsgrade könnte man sich also auch des umgekehrten Differential-Quotienten bedienen. Es soll indeß $\frac{dw}{ds}$ gebraucht werden.

§. 44.

Da c stets die absolute Drehungsgröße für den Kreis-Bogen = 1 angiebt, der mit der Curve an dem untersuchten Punkte gleiche Krümmung hat, bei gleichen Kreis-Bogen aber die Krümmungsstärken sich wie die Drehungsgrößen vermöge des von den ersteren gegeben Begriffes verhalten, so verändert sich die Krümmungsstärke eben so wie c, das entweder von s oder von w abhängt. Giebt man

dem Differential-Quotienten selbst den Namen k (Krümmungsstärke), so liegt daher in der Gleichung

$$c = k$$

das Gesetz, nach welchem die Krümmungsstärke sich verändert, und zugleich der Ausdruck der Krümmungsstärke an jedem beliebigen Curvenpunkte, den man durch Setzung eines bestimmten Werthes für s oder w bestimmen möchte. Die Differentialgleichung in der Form $c = k$ soll die Krümmungsgleichung heißen.

§. 45.

Die gesuchte allgemeine Methode ist demnach folgende:

1.) Man bringe die für die Curve gegebene Gleichung auf die Form $f(s) = w$, wenn das Gesetz der Krümmungsveränderung durch die Abhängigkeit des Krümmungsgrades (k) von der Bogenlänge gefordert wird; will man es hingegen durch die Abhängigkeit des k von der Drehungsgröße bestimmt wissen, so ertheile man der Curvengleichung die Form $\varphi(w) = s$.

2.) Man differentiire die so gestaltete Gleichung und gebe der enstehenden Differential-Gleichung

die Form $c = \frac{dw}{ds} (= k)$, so ist durch diese die Aufgabe gelös't. Im Beispiele durch $2s = k$.

3.) Man kann übrigens jede der beiden Formen der Curvengleichung $f(s) = w$ und $\varphi(w) = s$ benutzen, mag man nun die Krümmungsgleichung durch s oder durch w bestimmt wünschen. Im Falle sie nach der Differentiirung durch einen andern Bestandtheil bestimmt erscheint, als man beabsichtigt, so drücke man diesen vermittelst der Curvengleichung durch den geforderten Bestandtheil aus und schiebe diesen in die Krümmungsgleichung. Soll z. B. in der Krümmungsgleichung $2s = k$ das k durch w bestimmt werden, so rücke man wegen $s^2 = w$, $s = \pm \sqrt{w}$ in die Gleichung und man erhält $\pm 2\sqrt{w} = k$.

4.) Wünscht man das Gesetz der Krümmungsveränderung in anderer Form, durch ein Gleichverhältniß unter zwei allgemein bezeichneten Krümmungsgraden und Functionen der Längen oder der Drehungen ausgedrückt, so setze man dieselbe Krümmungsgleichung für einen zweiten allgemein durch s′ oder w′ bezeichneten Punkt der Curve, für welchen dann k′ die Krümmungsstärke und c′ den durch w′ oder s′

ausgedrückten Werth derselben bedeute. Die Proportion

$$k : k' = c : c'$$

leistet dann das Verlangte, nachdem c und c' mit den Werthen selbst ausgewechselt worden. c : c' giebt das Verhältniß der Krümmungsstärken zweier beliebigen Punkte und soll das Krümmungsverhältniß heißen. Im Beispiele hat man 2s' = k', also

$$\frac{k : 2s = k' : 2s'}{k : k' = s : s'}$$

d. h. die Krümmungsgrade dieser Curve verhalten sich wie die Bogenlängen.

Dieser Satz drückt nicht mehr so viel aus, als k = 2s; er hat einen Theil seines Gehaltes eingebüßt. Man kann nämlich aus ihm nicht mehr die absolute Krümmungsstärke bestimmen. Dieses gilt für das Krümmungsverhältniß überhaupt, sobald es, wie gewöhnlich, durch Ausscheidung gleicher Factoren abgekürzt ist.

§. 46.

Aus der bisherigen Entwickelung ergiebt sich die Methode, umgekehrt aus der Krümmungsgleichung die Curvengleichung zu finden. Man setze nur in

dieser $\frac{dw}{ds}$ für k, integrire und füge die Constante hinzu, falls sie bestimmbar ist. Dieses Verfahren bestimmt aus der Art und Weise, wie eine Curve sich krümmen soll, diese selbst.

§. 47.

Es ist leicht, aus der Krümmungsgleichung die Punkte der stärksten und schwächsten Krümmung zu ermitteln, und geschieht, indem man auf gewöhnliche Weise die Werthe des Bestandtheiles der Gleichung sucht, für welche k ein Maximum und ein Minimum wird. Diese Untersuchung im Verein mit der voranzuschickenden ersten und einfachsten Analyse der Krümmungsgleichung ist auch sonst wichtig und überhaupt für die Erkenntniß der Krummen von Belang. Sie kommt z. B., wie schon bemerkt, bei der Classificirung in Frage. Wiederholt sich das Maximum und Minimum der Krümmung unendlich oft, so ist die Linie eine periodische ꝛc.

§. 48.

Durch die Krümmungsgleichung wird ein Kreisbogen von bestimmter Krümmungsstärke angegeben, da c ausdrückt, wie viel Drehungseinheiten gleichmäßig auf die Längen-Einheit vertheilt werden sol-

len. Der Kreis, dem dieser Kreisbogen angehört, heißt der Krümmungskreis. Die einfachste Form der Kreisgleichung ist nach §. 30, 6.

$$a . S = W,$$

woraus $\frac{W}{S} = a$, d. h. auf eine Längeneinheit des Kreises fallen a Drehungseinheiten. Daher ist $a = c$ und daraus die Gleichung des Krümmungskreises

$$c . S = W,$$

wo S und W nach denselben Einheiten gemessen sind, wie s und w. Der Krümmungskreis der Curve $s^2 = w$ ist also

$$(2s) S = W,$$

und z. B. an dem Punkte der Curve $s = 7$

$$14 S = W.$$

§. 49.

Der Quotient $\frac{S}{W}$ bezeichnet, wie viel Längeneinheiten einer Drehungseinheit zugehören. Die Zahl dieser Längeneinheiten steht mit der Größe des Kreises in geradem Verhältnisse. Nun folgt aus der Gleichung $c S = W$ die weitere

$$\frac{S}{W} = \frac{1}{c}.$$

Ebenso viel mal so groß also c wird, ebenso viel mal so klein $\frac{s}{w}$, d. i. die Krümmungskreise (also auch ihre Radien, die Krümmungshalbmesser) verhalten sich umgekehrt, wie die Krümmungsstärken.

Der umgekehrte Differentialquotient $\frac{ds}{dw}$ giebt also die Verhältnißzahlen für die Krümmungshalbmesser, oder das Gesetz, nach welchem sie sich verändern, an, ohne ihren absoluten Werth zu bestimmen.

§. 50.

So oft die in Graden ausgedrückte Größe der Drehungseinheit in 360° liegt, so oft enthält der Umfang eines Kreises die der Drehungseinheit angehörige Bogenlänge. Da nun diese letztere für den Krümmungskreis $= \frac{1}{c}$, so ist, wenn der Umfang des Krümmungskreises K, und der Exponent, welcher durch die Division der in Graden gegebenen Drehungseinheit in 360° entsteht, e genannt wird,

$$K = \frac{e}{c},$$

folglich der Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{e}{2\pi c}.$$

Sei in unserm Beispiele die Drehungseinheit $= 20°$, so ist $e = 18$, daher $R = \frac{18}{4\pi . s}$. Für den

Punkt z. B. $s = 9$ ist also $R = \frac{1}{2\pi}$, nach der Längeneinheit von s gemessen.

Anmerkung. Aus der Gleichung für den Krümmungshalbmesser entsteht $c = \frac{s}{2\pi . R}$. Da c eine Function von s ist, so giebt dieser Ausdruck den Punkt, wo der Krümmungskreis liegt oder die Bogenlänge durch den Krümmungshalbmesser. Im letzten Beispiele ist $2s = \frac{18}{2\pi . R}$, also $s = \frac{9}{2\pi . R}$.

§. 51.

Ein Beispiel zur Berechnung des Krümmungsgesetzes und zur Vergleichung der Krümmungsgrade zweier Punkte mag diese Betrachtung schließen.

Durch Berechnung aus der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten findet sich weiter unten die ursprüngliche Gleichung der apollonischen Parabel:

$$s = \frac{p}{4}\left(\frac{\text{tg}\, w}{\cos.\, w} + \log.\, \text{nat.}\, \text{tg.}\, (45° + \tfrac{1}{2} w)\right).$$

Daraus ist durch Differentiation

$$ds = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos.^3 w};$$ und ferner

$$\frac{2}{p} \cdot \cos^3 w = \frac{dw}{ds} = ,$$

daher $k : k' = \cos.^3 w : \cos.^3 w'$, d. i. die Krümmungsstärken der gemeinen Parabel verhalten sich

wie die Würfel der Cosinus der entsprechenden Winkel oder Drehungsgrößen.

Specielles Beispiel. Man will die Krümmung der Parabel am Scheitelpunkte mit der Krümmung vergleichen, die sie am Punkte $w = 45°$ hat.

Es ist $\cos. \angle o = 1$, $\cos. \angle 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, daher

$$k : k' = 1 : \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Die Berechnung dieses Verhältnisses durch den Krümmungshalbmesser, wenn dieser auf dem bekannten Wege aus der Coordinatengleichung gefunden ist, gewährt dasselbe Ergebniß.

Es ist nämlich der Krümmungshalbmesser der gemeinen Parabel, ausgedrückt durch die Abscisse,

$$R = \frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}.$$

Für den Scheitelpunkt $x = 0$ entsteht durch Einschiebung $R = \frac{p}{2}$.

Nun liegt der Punkt, an dem die Drehung der Curve 45° beträgt, gerade über dem Brennpunkte, wie aus einer einfachen Betrachtung hervorgeht. Also $x = \frac{1}{4}p$, daher für diesen Punkt durch Einschiebung $R = \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{8}$.

Da nun die Krümmungsgrade sich umgekehrt wie die Krümmungshalbmesser verhalten, so ist

$$\frac{k:k' = \frac{p}{2}\sqrt{8} : \frac{p}{2}}{k:k' = 1 : \frac{1}{\sqrt{8}},}$$

wie oben.

§. 52.

Um die positive eigentliche Definition von der Gestalt einer ebenen Curve aufzustellen, gehen wir von der bekannten negativen für alle Raumgebilde geltenden Begriffbestimmung aus, welche in Beziehung auf ebene Curven festsetzt, daß sie gestaltgleich oder ähnlich seien, wenn einzig und allein ihre absolute Länge und was damit etwa nothwendig sich verknüpfen möchte, sonst aber nichts an ihnen verschieden ist. Welche Bestimmungen bleiben also, als an ihnen nothwendig gleich, zurück? — Sie müssen sich genau auf gleiche Weise krümmen, daher auch eine gleiche absolute Größe der gesammten Drehung haben, ohne jedoch eine gleiche Krümmungsstärke an Punkten von gleich großer absoluter Drehung nothwendig zu besitzen. Diese muß vielmehr verschieden sein, wenn nicht zufällig die Curven auch an Größe gleich sind, denn sie hängt mit von der Bogenlänge ab. Daher die positive Definition:

Ebene Curven sind ähnlich, wenn die Krümmungsstärken an beliebigen Punkten der einen in demselben Verhältnisse stehen, wie die an den ähnlich liegenden Punkten der andern. Aehnlich liegende Punkte sollen diejenigen genannt werden, an denen die absoluten Drehungsgrößen, vom Ursprung an gerechnet, gleich sind.

§. 53.

Um die Frage über die Aehnlichkeit zweier Curven zu entscheiden, berechnet man also aus der Gleichung einer jeden von ihnen das Krümmungsverhältniß, bestimmt es für ähnlich liegende Punkte und prüft die Gleichheit beider.

Die Bestimmung der ähnlich liegenden Punkte in beiden Krummen macht folgende Auseinandersetzung nöthig.

1.) Sind die Krümmungsverhältnisse durch ihre Abhängigkeit von w und w' in der ersten, und von W und W' in der zweiten Curve gegeben (der bequemste Fall), so ist die Frage, ob die absolute Größe der Drehungseinheit für beide Curven dieselbe ist oder nicht. Im ersteren Falle hat man der Bedingung gemäß $w = W$, $w' = W'$, schiebt statt der großen Buchstaben die kleinen ein und prüft

das Verhältniß. Im zweiten Falle möge die absolute Größe der Drehungseinheit für die erste Curve sich zu der für die zweite verhalten wie f : 1. Dann ist der mit w ähnlich liegende Punkt $W = fw$, der mit w' ähnlich liegende $W' = fw'$; man setzt diese Werthe ein und verfährt wie vorher. — Sind jedoch die von w, w', W, W' vorkommenden Functionen trigonometrische, so muß man den vier genannten Zahlen den Werth ihrer absoluten Einheiten unterschieben, also jedesmal gleiche absolute in Graden ausgedrückte Winkelgrößen für w und W, w' und W' setzen.

Beispiel. Die Krümmungsgrade der gemeinen Parabel verhalten sich wie die Würfel der Cosinus der Drehungswinkel (§. 51), also ist das Krümmungsverhältniß

$$\cos.^3 w : \cos.^3 w'.$$

Seien in einem andern derselben Gleichung angehörigen Curvenexemplare W und W' ähnlichliegend mit w und w', so ist die Bedingung der Aehnlichkeit

$$\frac{\cos.^3 w : \cos.^3 w' = \cos.^3 W : \cos.^3 W'}{\cos. w : \cos. w' = \cos. W : \cos. W'.}$$

Nimmt man gleiche absolute Größen der Drehungs-

einheit für beide Curvenexemplare, so ist der Bedingung des Aehnlichliegens zufolge $w = W$, $w' = W'$, daher die Proportion wahr und die Aehnlichkeit vorhanden.

Soll diese aber überhaupt Statt finden, so muß die Proportion auch dann richtig bleiben, wenn man für beide Curvenexemplare verschiedene absolute Größen der Drehungseinheit setzt, also

$$\cos. w : \cos. w' = \cos. fw : \cos. fw'.$$

Zwar sind w und fw, ebenso w' und fw' verschiedene Zahlen, aber fw und fw' sind nach einer andern absoluten Einheit gezählt, als w und w'; sobald man sie auf Winkelgrade reducirt, muß, der Bedingung gemäß, w deren genau so viele als fw, w' eben so viele als fw' enthalten. Daher ist die Proportion überhaupt richtig und alle apollonische Parabeln sind ähnlich.

Um jedes Mißverständniß zu verhüten folge ein Zahlenbeispiel. Sei $w = 2$, $w' = 3$ bei einer absoluten Größe der Drehungseinheit von $5°$. Im 2. Exemplare sei diese $= 1°$, folglich $W = 5 . 2 = 10$, $W' = 5 . 3 = 15$. Also die Proportion

$$\cos. 2 : \cos. 3 = \cos. 10 : \cos. 15.$$

Da aber die Einheit der beiden ersten Glieder $= 5°$, der beiden letzteren $1°$ ist, so folgt

$$\cos. 10° : \cos. 15° = \cos. 10° : \cos. 15°.$$

Uebrigens sieht man, wie die Aehnlichkeit aller apollonischen Parabeln aus der Proportion der Krümmung schon durch die bloße Bemerkung dargethan wird: w und W, w' und W' haben nach der Bedingung gleichen absoluten Inhalt an Winkelgraden. Indeß ist der eingeschlagene Umweg gewählt, um ihn für Fälle, wo er nicht entbehrlich ist, zu zeigen.

2. a) Wenn die Krümmungsverhältnisse beider Curven durch Vermittlung der Bogen gegeben sind, so seien zwei beliebige aber verschiedene Punkte in der ersten durch s und s' bezeichnet, die ähnlich liegenden in der andern durch S und S'. Nach dieser Annahme würden also den Punkten s und S gleiche absolute Drehungsgrößen von den Anfangspunkten aus angehören, ebenso den Punkten s' und S' unter sich. Man berechne die Größe der Drehung der Curven an den Punkten s, s', S und S' aus den Gleichungen, so besitzt man sowohl die Werthe von w und W als von w' und W'. Nun hat man, wie unter (1), entweder $w = W$, $w' = W'$ oder $fw = W$, $fw' = W'$. Es finde das Eine oder das Andere Statt, so bilde man die beiden entsprechenden Gleichungen der Werthe. Dadurch erhält

man die ähnlich liegenden Punkte der zweiten Curve S, S′ durch die Punkte der ersten s, s′ ausgedrückt. Nachdem vermittelst dieser Ausdrücke S und S′ aus der Krümmungsproportion geschafft, prüft man ohne Weiteres ihre Richtigkeit.

2. b) Auch *der* Weg kann eingeschlagen werden, die Bogen in den Krümmungsverhältnissen durch die Winkel auszudrücken und darauf wie unter (1) zu verfahren.

Beispiel zu 2. a) Sind alle Exemplare der Curve $s = aw^2$ einander ähnlich?

Die Krümmungsstärke ist $\frac{1}{2\sqrt{as}}$, also das Krümmungsverhältniß

$$\frac{1}{2\sqrt{as}} : \frac{1}{2\sqrt{as'}};$$

folglich die Bedingung, daß dieses gleich sei dem Verhältnisse

$$\frac{1}{2\sqrt{AS}} : \frac{1}{2\sqrt{AS'}}.$$

Aus dieser Proportion folgt

$$s' : s = S' : S.$$

Nun ist in den Punkten s′, s, S′, S die Drehung, nach Anleitung der gegebenen Gleichung

$$w' = \sqrt{\tfrac{s'}{a}}, \quad w = \sqrt{\tfrac{s}{a}},$$

$$W' = \sqrt{\tfrac{S'}{A}}, \quad W = \sqrt{\tfrac{S}{A}}.$$

Es seien die absoluten Größen der Drehungseinheit ungleich wie vorher, so daß $W' = fw'$, $W = fw$, daher

$$f r^{\frac{s'}{a}} = r^{\frac{S'}{A}}, \quad f r^{\frac{s}{a}} = r^{\frac{S}{A}}.$$

$$\frac{A}{a} f^2 . s' = S', \quad \frac{A}{a} f^2 . s = S.$$

Durch Einschiebung dieser Werthe für S' und S in die letzte Proportion entsteht

$$s' : s = s' : s.$$

Also sind alle Erscheinungen dieser Curve gleichgestaltig.

Anmerk. Dieses Ergebniß findet sich bei weitem leichter auf dem Wege 2, b. (Siehe §. 69, V.)

Beispiel zu 2. b) Haben alle der Gleichung $w = as^2$ angehörige Curven-Exemplare dieselbe Gestalt oder nicht?

Die Krümmungsstärke ist (nach §. 67, III) $2as$, daher das Krümmungsverhältniß zweier Punkte

$$s : s'.$$

Sei die Gleichung eines zweiten Exemplares

$$W = AS^2,$$

so ist die Krümmungsstärke $2AS$, daher das Krümmungsverhältniß

$$S : S'.$$

Also ist, wenn s und S, s' und S' ähnlich liegende Punkte bedeuten, die Bedingung der Aehnlichkeit

$$s : s' = S : S'.$$

Hieraus entsteht durch Auswechselung der Bogen mit den Winkeln

$$\frac{r\frac{w}{a} : r\frac{w'}{a} = r\frac{W}{A} : r\frac{W'}{A}}{w : w' = W : W'.}$$

Bei ungleichen absoluten Größen der Drehungseinheit wie unter (1)

$$\frac{w : w' = fw : fw'}{w : w' = w : w';}$$

wodurch die Frage bejaht ist.

§. 54.

Der Begriff der Form einer ebenen Curve läßt sich nach dem Gesagten so fassen. Die Gestalt ist die Krümmungsweise. Diese ist durch das Krümmungsverhältniß bestimmt. Ist dieses selbst unveränderlich, d. h. von willkührlichen, beständigen Größen unabhängig, so ist die Krümmungsweise der Curve unter allen Bedingungen dieselbe. Um daher zu prüfen, ob eine Curve ihre Gestalt wandle oder nicht, darf man nur die allgemeinen beständigen Größen des Krümmungsverhältnisses mit andern

auswechseln, und die absolute Drehungseinheit ändern, d. h. statt w, w′ setzen fw, fw′, und untersuchen, ob dadurch das Verhältniß verändert wird oder nicht. Im letzten Falle hat die Curve nur eine einzige Gestalt.

Auch die verschiedenen Arten bloßer Verwandtschaft der Gestalt lassen sich durch weitere Beleuchtung und Verfolgung der hier entwickelten Grundidee in ein förmliches System bringen. Die Auffassung des ganzen Flusses von Gestalten, die eine gestaltwandelnde Curve annimmt, kann nach Anleitung der Bedingungen geschehen, unter welchen sich die Krümmungsproportion von der Wahrheit entfernt oder ihr sich nähert. Ich gebe unten ein ausführliches Beispiel. Eine solche Theorie der Metamorphose der Gestalt forscht den Bedingungen nach, unter welchen die Verwandlung aller mathematisch gesetzmäßigen Bildungen des Geistes und der Natur erfolgen, und unterwirft sie dadurch auf dem einfachsten Wege der Macht der Erkenntniß.

Drittes Kapitel.

Bedingungen der Convexität und Concavität.

§. 55.

Durch eine ebene Linie, sie sei endlich oder unendlich, wird die Ebene, in welcher sie liegt, theilweise oder ganz begrenzt; wobei als hier gleichgültig unberücksichtigt bleibe, ob diese Grenze zugleich eine in sich zurückkehrende, also ein endliches Stück der Ebene völlig einschließende sei, oder nicht. Die Grenze selbst nun kann eine Binnengrenze oder eine Außengrenze sein. Verunendlicht man indeß im letzten Falle die Ebene, so wird auch die Außengrenze zur Binnengrenze. Alle ebene Linien oder Theile von ihnen sind also Binnengrenzen unendlicher Ebenen. Eine Binnengrenze zerlegt in Theile. Man kann also in Beziehung auf eine Linie in der Ebene stets zwei Theile der letzteren unterscheiden, welche ihre beiden Seiten, oder auch, insofern diese sich in der Linie berühren, die Seiten der Linie selbst genannt werden. Diese Unterscheidung gilt jedoch nur für den Verlauf der Linie. Wo diese aufhört,

endet die Begrenzung und damit auch das Diesseits und Jenseits.

Auch die gerade Linie hat also zwei Seiten. Aber diese sind durch nichts unterschieden, weil der Geraden, kraft ihres Begriffes, Richtungsveränderung fehlt. Auf dieser lediglich beruht die Unterscheidung von Convexität und Concavität. Eine gerade Linie ist daher an der einen wie an der andern Seite weder convex noch concav, es mangelt die Basis des Begriffes und daher der Begriff selbst. Sie stellt die Indifferenz beider dar und kann plan genannt werden, so wie die Ebene in Beziehung auf gebogene Flächen.

Man denke sich einen Bogen einer Krummen, dessen Drehung stets nach derselben Seite gehe und nicht über 180° betrage. Dieser sei gleich einem Faden biegsam, und man vermindere seine Krümmung immer mehr, bis eine Gerade entstanden ist. Nun beginne diese sich von neuem zu krümmen, aber nach der andern Seite, so daß die vorher concave Seite des Bogens die convexe wird, und umgekehrt. Hier bildete die gerade Form den Uebergang des Concaven in's Convexe, wenn man nicht an einen einzelnen Punkt der Linie, sondern an ihren ganzen Verlauf denkt. Diese Bemerkung ist geeignet, das

Verhältniß der Geraden zur Krummen in Beziehung auf Convexität und Concavität anschaulich zu machen, weshalb ich vorgriff, da die in Rede stehenden Begriffe selbst erst jetzt folgen.

§. 56.

Indem eine Curve fortzuschreiten und ihre Richtung zu verändern anfängt, wendet sie sich nach der einen oder der andern Seite der Anfangsrichtung, d. h. sie dreht sich positiv oder negativ. Auf die eine oder die andere Weise muß sie in Beziehung auf die Richtung, die sie in irgend einem Punkte hat, fortfahren. Man nennt nun an irgend einem Punkte der Curve diejenige Seite derselben, auf welcher das beliebig kleine Anfangs-Stück der Richtungslinie dieses Punktes liegt, die convexe, die andere die concave Seite.

Die dem ersten, beliebig kleinen Theile der Richtungslinie zugekehrte Seite ist also im Punkte der Richtungslinie die convexe, die abgewandte die concave.

§. 57.

Soll der gegebene Begriff völlig klar erscheinen, so darf nicht außer Acht gelassen werden, daß, streng genommen, die Curve in jedem Punkte zwei ver-

schiedene einander gerade entgegengesetzte Richtungslinien hat: die eine, sofern man den Punkt als Grenzpunkt des einen von ihm auslaufenden Astes, die andere, sofern man ihn als Grenzpunkt des anderen Astes betrachtet. Dieses liegt im Begriff der Richtungslinie, als einer geraden Linie, welche die Richtung ausdrückt, die die Curve während ihres Laufes, bei stetiger Drehung, in irgend einem Punkte hat; wobei es also darauf ankommt, ob man den Lauf der Curve vorwärts oder rückwärts verfolgt. Diese Zweiheit der Richtungslinie für einen und denselben Punkt kann nicht seltsam erscheinen, denn man spricht nie von der Richtung eines Punktes, sondern immer von der Richtung der Curve in einem ihrer Punkte. — In Fig. 8 z. B. ist die Richtungslinie der von f nach a fortgehenden Krummen im Punkte a die Gerade ab; ac dagegen nur die Rückwärts-Verlängerung derselben. Für den von d nach a gehenden Bogen ist dagegen für denselben Punkt die Richtungslinie ac, ab dagegen die Verlängerung. Wie in diesem Beispiele, so bildet überall die eine Richtungslinie die Verlängerung der andern, und da man die Linie ebensowohl so als so herum zu verfolgen berechtigt ist, so bilden beide Richtungslinien ein Gan-

zes, das man mit dem Namen der Tangente belegt. Daß übrigens diese stets eine Gerade ist, d. h. daß beide Richtungslinien stets einander gerade entgegengesetzt sind, sieht man leicht: denn bildeten sie einen schiefen oder rechten Winkel, so machte damit die Curve in einem bloßen Punkte, also ohne fortzuschreiten, eine endliche Drehung, welches dem Begriffe der Krummen, nach welchem sie nur im Fortschreiten sich drehen soll, geradezu widerspricht.

Man darf bei der Bestimmung der Richtungslinie eines Punktes nicht von diesem selbst (wie von einem Anfangspunkte) nach zwei verschiedenen Richtungen zugleich ausgehen, oder von zwei anderen vor und hinter ihm liegenden Punkten zugleich sich nach jenem hinbewegen: denn in beiden Fällen schreitet man entgegengesetzt fort. Vielmehr muß die angenommene Weise festgehalten, von einem Punkte diesseit des fraglichen Punktes nach einer Richtung hin der Lauf verfolgt, und darauf abgesondert anders herum von einem Punkte jenseit des fraglichen Punktes die Linie durchlaufen werden. Dann erhält man zuerst die eine, darauf die andere Richtungslinie für den Punkt.

Auf welcher Seite der Curve übrigens die Richtungslinie liegt, geht immer unzweideutig hervor, wenn man die letztere rückwärts verlängert.

§. 58.

1. Ist der Punkt, an welchem eine Curve in Beziehung auf Convexität und Concavität untersucht werden soll, ein gemeiner Curvenpunkt, so ist die Linie in diesem Punkte auf der einen Seite convex, auf der andern concav, man mag ihren Lauf hin oder her verfolgen. Denn die von diesem Punkte ausgehenden Anfangsstücke beider Richtungslinien, oder, was dasselbe sagt, die eine der beiden Richtungslinien und ihre rückwärtslaufende Verlängerung liegen auf derselben Seite der Krummen, weil die Drehung zunächst vor und zunächst hinter dem fraglichen Punkte nach derselben Seite hin, ohne Entgegensetzung, erfolgt. In einem gemeinen Curvenpunkte geht also auch die Convexität oder Concavität nicht auf die andere Seite der Curve über, sondern beharrt auf einer und derselben.

2. Ein anderes Ergebniß erhält man für einen Wendungspunkt. Da in ihm die Drehung die entgegengesetzte wird, so wendet sich die Curve, nach dem Begriffe dieser Entgegensetzung, auf die andere

Seite der Richtungslinie dieses Punktes. Verlängert man diese also rückwärts, so wird sie in dem Punkte selbst von der Curve und die Curve von ihr geschnitten. Die Richtungslinie des einen von dem Punkte ausgehenden Curven-Astes liegt also auf dieser, die des andern auf jener Seite der Krummen. Verfolgt man also den Lauf der Curve hinwärts, so ist sie in demselben Punkte auf derselben Seite convex, in dem sie, herwärts verfolgt, concav ist, oder umgekehrt. In einem Wendungspunkte ist daher die Curve auf der einen wie auf der andern Seite sowohl concav als convex, je nachdem man diesen Punkt als Durchgangspunkt des einen oder des andern Astes betrachtet. In Fig. 4 z. B. ist cd die Richtungslinie des von a nach c gezogenen Bogens im Punkte c; sie liegt auf der oberen Seite der Curve, also ist diese die convexe im Punkte c. Dieser wurde hierbei als Grenzpunkt oder Durchgangspunkt des Bogens ac angesehen. Hingegen ist dieselbe Seite die concave, sobald man c als Grenzpunkt des Bogens fc denkt, weil dann die Richtungslinie ce ist und diese an der andern Seite der Krummen liegt. — Es ist hier ein ähnlicher Fall wie bei einer arithmetischen

Progression, die von 0 aus nach beiden Seiten in's Unendliche läuft, z. B.:

. . . . 4, 3, 2, 1, 0, - 1, - 2, - 3, - 4, ...

Das Nichts an sich ist zwar weder positiv noch negativ, aber als Grenze der positiven Reihe habe ich Recht, es als ein Gesetztes, als Grenze der negativen, es als ein Entgegengesetztes zu betrachten. Wie in jedem Uebergangs-Momente von Entgegengesetzten zwei widerstreitende Begriffe durch wechselseitigen Austausch ihrer Elemente zugleich bestehen und sich aufheben, je nachdem man diesen Moment als gemeinschaftliche Grenze zweier Entgegengesetzten, was er doch ist, ansieht, oder ihn absolut, ohne Beziehung auf frühere oder spätere Momente betrachtet (welches, wenn diese letztern vorhanden gedacht werden, unzulässig ist): so verhält es sich auch hier mit der Convexität und Concavität. Der einfachste Ausdruck der Sache ist, daß sich in dem Wendungspunkte auf jeder Seite der Curve sowohl die Grenze der Convexität als die der Concavität befindet. Hiermit wird man allgemein einverstanden sein, und es ist dadurch zugleich ein solcher Punkt als Uebergangspunkt der Convexität in die Concavität, auf jeder der beiden Seiten der Curve bezeichnet.

Uebrigens wird es den Bewanderten nicht befremden, wenn ein so einfacher Gegenstand eine so weitläuftige Discussion veranlaßt; man wird sich an ähnliche Fälle erinnern, wo der Begriff der Grenze, überhaupt der feinste und wichtigste der ganzen Mathematik, den Forscher zu verweilen zwang.

3. Da in einer Spitze die Drehung unentgegensetzt bleibt, so fallen beide Richtungslinien auf dieselbe Seite der Curve; die eine ist auch hier, wie immer, die Verlängerung der andern. In einem solchen Punkte ist daher die Curve auf der einen Seite convex, auf der andern concav, und zwar das Letztere an der Außenseite der Spitze, da die eine Richtungslinie nothwendig nach der Innenseite, zwischen beide Curvenäste fällt. In Fig. 5 stellt cd die Richtungslinie des Bogens ac, ce die von cf im Punkte c dar, in welchem die Curve concav an der rechten, convex an der linken Seite ist. Es findet an einem solchen Punkte kein Uebergang der Convexität in die Concavität oder umgekehrt Statt.

4. In einem Schnabel sind abermals die Richtungslinien Verlängerungen von einander, liegen aber dennoch, aus demselben Grunde wie unter 2., auf verschiedenen Seiten der Curve, welches hier

dadurch geschieht, daß die beiden Aeste den Richtungslinien verschiedene Seiten zuwenden, der eine die Außenseite, der andere die Innenseite. Also ist, ebenso wie bei einem Wendungspunkte, im Schnabelpunkte sowohl auf der einen als auf der andern Seite der Curve die Grenze ihre Convexität und Concavität, die eine geht in die andere über. In Fig. 6 ist cd die Richtungslinie des Bogens ac, ce die des Bogens cf im Punkte c. Der Bogen ac ist im Punkte c auf der äußern Seite (nach oben) convex, der Bogen fc in demselben Punkte auf derselben, der äußern Seite (nach unten) concav.

§. 59.

Versetzt man sich in die unendlich gedachten Richtungslinien eines gemeinen Curvenpunktes, so entfernt sich die Curve, vermöge ihrer Drehung in ihrem ersten Verlaufe mit beiden Aesten von der Tangente, und schliest dadurch einen Theil derjenigen unendlichen Ebene aus, die nach der Seite der Richtungslinie sich erstreckt, auf welcher die Krumme liegt. Hingegen schliest diese auf ihrer andern Seite einen Theil derselben unendlichen Ebene ein. In Fig 8 z. B. ist der Raum zwischen bc

und daf von der Curve ausgeschlossen, sie wendet sich von diesem Theile der Ebene ab, kehrt ihr den Rücken (die convexe Seite) zu. Der zwischen d, f und a liegende Theil der Ebene wird hingegen von der Curve an einer Seite eingeschlossen. — Dasselbe läßt sich in Bezug auf die Curve so ausdrücken: die Aeste eines beliebig kleinen Bogens ohne Uebergangspunkt neigen sich auf einer Seite desselben einander zu, auf der andern von einander ab; im Gegensatz von der geraden Linie, deren Aeste sich nach dieser oder jener Seite weder einander zu, noch von einander abneigen. In dieser Ausschließung des Raumes und der gegenseitigen Abneigung der Curvenäste nach der einen Seite und der Einschließung des Raumes und der Gegeneinanderneigung der Aeste nach der andern Seite liegt die Erscheinung des Erhobenen und Hohlen oder Convexen und Concaven, und man sieht, daß diese Namen der Anschauung vollkommen entsprechen. Auch fällt mit dieser der gegebene Begriff zusammen; denn auch er bezieht sich nicht bloß auf einen einzelnen Punkt, sondern, indem er über ihn entscheidet, auf eine stetige Reihe derselben, da er bestimmt, ob diese zunächst diesseit oder jenseit der Richtungslinie liegen soll.

§. 60.

Man fragt oft danach, ob eine Curve in irgend einem Punkte ihres Laufes einer der Lage nach gegebenen Geraden die convexe oder concave Seite zukehre, und thut dieselbe Frage auch wohl in Beziehung auf eine zweite Krumme, oder auf zwei Bogen einer und derselben Curve. Da diese letzte Frage eine absolute Eigenschaft der Curve betrifft, so müssen die Bedingungen der Bejahung oder Verneinung derselben hier zur Sprache kommen.

1. Bedingungen in Beziehung auf eine der Lage nach gegebene Gerade. Man ziehe die Richtungslinie des Curvenpunktes, denn dieser muß gegeben sein, wenn nicht die Frage in vielen Fällen eine unbestimmte sein soll, da derselben Geraden die Curve in dem einen ihrer Punkte die convexe, in dem andern die concave Seite zuwenden kann. Ist zuerst die Untersuchung für einen einzelnen Curvenpunkt geführt, so kann sie auf eine stetige Reihe von Punkten, d. i. auf einen Bogen oder die ganze Curve ausgedehnt werden.

Die Richtungslinie läuft entweder parallel mit der Geraden oder nicht.

a) Im ersten Falle kehrt der Geraden nach ihrem ganzen Verlaufe die Curve in dem betreffenden Punkte,

α) im Falle er ein gemeiner Curvenpunkt ist, die convexe Seite zu, wenn die beliebig klein genommenen Anfangsstücke beider von dem Fragepunkte ausgehende Aeste der Curve außerhalb der Parallelen liegen, die concave dagegen, wenn sie innerhalb liegen. In Fig. 13 z. B. wendet die Curve im Punkte a der bc in allen ihren Punkten die convexe, der df in allen ihren Punkten die concave Seite zu.

β) im Falle er ein Wendungspunkt ist, (wobei immer ein Anfangsstück außerhalb der Parallelen, das andere innerhalb liegt) sowohl die convexe als die concave Seite, nämlich die Grenze von beiden zu. In Fig. 14 z. B. wendet im Punkte a der Bogen ha der df die concave, der Bogen ga die convexe Seite zu. Aehnlich in Beziehung auf bc.

γ) im Falle er eine Spitze ist, wie unter β), nur mit dem Unterschiede, daß dort die zugleich hergewandte concave und convexe Seite

auf derselben Seite, hier aber auf verschiedenen Seiten der Curve liegen. Im Punkte a Fig. 15 kehrt z. B. die Krumme in Beziehung auf den Bogen ha der df ihrem ganzen Verlaufe nach die concave, in Beziehung auf den Bogen ga desgleichen die convexe Seite zu.

δ) im Falle er ein Schnabel ist, die convexe Seite zu, wenn beide Anfangsstücke außerhalb der Parallelen liegen, die concave, wenn innerhalb. In Fig. 16 z. B. kehren beide Aeste der Curve in a der bc die convexe, der df die concave Seite zu.

b) Im zweiten Falle verlängere man die Richtungslinie bis sie die Gerade trifft, so entstehen Nebenwinkel auf der Basis der gegebenen Geraden, deren gemeinsamer Schenkel die Richtungslinie ist.

α) Der Fragepunkt sei ein gemeiner Curvenpunkt. Demjenigen einzelnen Punkte der gegebenen Geraden, den die Richtungslinie trifft, kehrt die Curve im Fragepunkte sowohl die convexe als die concave Seite zu; demjenigen Theile der Geraden, zwischen dem

und der Richtungslinie die beliebig kleinen Anfangsstücke der Curve liegen, die concave Seite, dem andern Theile die convexe. Im Punkte a z. B. wendet die Curve Fig. 17 dem Punkte k sowohl die convexe als concave Seite, der kb die erstere, der kc die letztere zu.

β) Ist der fragliche Punkt ein Wendungspunkt, sowohl die convexe als die concave, und zwar gilt dies im Schneidepunkte k der Geraden und der Richtungslinie für beide Aeste der Curve zugleich. (Fig. 18.) Dem Theile der Geraden rechts vom Treffpunkte (kb) kehrt der eine Ast im Punkte a die concave, der andere die convexe Seite, dem Theile links (kc) der zuerstgenommene Ast umgekehrt die convexe, der andere die concave Seite zu.

γ) Ist der fragliche Punkt eine Spitze, so sind die Bedingungen wie unter β, nur wieder mit dem Unterschiede, daß dort die zugleich hergewandte convexe und concave Seite auf derselben Seite, hier aber auf verschiedenen Seiten der Curve liegen. (Fig. 19.)

δ) **Wenn der fragliche Punkt ein Schnabel ist**, so kehrt die Curve in diesem Punkte demjenigen Punkte der Geraden, den die Richtungslinie trifft, sowohl die convexe als die concave Seite zu; demjenigen Theile der Geraden, zwischen dem und der Richtungslinie die Anfangsstücke liegen, die concave, dem andern die convexe. (Fig. 20.)

2. Will man untersuchen, ob eine Curve in einem bestimmten Punkte einer andern Curve in einem ebenfalls bestimmten Punkte, oder auch derselben in einem andern Punkte die convexe oder die concave Seite zuwende, so ziehe man die Richtungslinien beider Punkte, und sehe die an den letzteren Punkt gezogene als die (unter 1) gegebene Gerade an. Wie sich die erstere Krumme rücksichtlich der Zuwendung ihrer convexen oder concaven Seite gegen denjenigen Punkt der Geraden verhält, in welcher diese die zweite Krumme oder den zweiten Bogen derselben Curve berührt, ebenso verhält sie sich gegen die letztere selbst, im Berührungspunkte. Hierdurch ist die Entscheidung über diese Frage auf die Untersuchung der unter 1 aufgestellten Bedingungen zurückgeführt.

§. 61.

Nach den aufgestellten Bedingungen entscheidet sich leicht das Verhalten der beiden von einem der 4 eigenthümlichen Curvenpunkte ausgehenden beliebig kleinen Curvenäste in Beziehung auf deren gegenseitige Zu- oder Abwendung der Convexität und Concavität.

1. die beiden von einem gemeinen Curvenpunkte ausgehenden beliebig kleinen Anfangsstücke der Krummen kehren einander die concave Seite zu. Denn die Richtungslinien beliebig nahe liegender Punkte eines Bogens ohne Uebergangspunkte schneiden sich, gehörig verlängert, nothwendig außerhalb der Curve, fassen diese also zwischen sich (§. 60, 1, b, a). Der Grund dauert fort, so lange die Curve ohne Uebergangspunkte bleibt und die Drehung nicht über 180° beträgt. So lange findet also auch die Folge Statt.

2. Die beiden beliebig kleinen Anfangsäste eines Wendungspunktes, für gleich große Drehung dieser Anfangsäste, die concave.

3. Die Anfangsäste einer Spitze kehren sich ge-

genseitig die convexe Seite zu. Dieses dauert, wenn kein neuer Uebergangspunkt eintritt, aus ähnlichen Gründen wie unter 1, fort, bis einer der Aeste die Drehung von 90° überschreitet.

4. Von den Anfangsästen eines Schnabels drehet der eine dem andern die concave, dieser jenem die convexe Seite zu.

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung der absoluten Eigenschaften einzelner Curven.

Erstes Kapitel.

Die Kreislinie.

§. 62.

Die einfachste Form der Kreisgleichung ist nach §. 30, 6,

$$w = a . s,$$

wo vorläufig a sowohl positiv als negativ gewählt werden kann, ohne daß dadurch mehr als verschiedene Lagen des Kreises bezeichnet würden. Da aber hier die Linie lediglich in Beziehung auf sich selbst betrachtet werden soll, so ist die Beschränkung: a sei positiv, ohne Nachtheil für die Allgemeinheit der Betrachtung.

I. Lauf im Allgemeinen.

1. Für $s = 0$ ist $w = 0$: die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung. (ab, Fig. 8.)
2. Jeder positive Werth für s ergiebt einen positiven, und zwar nur einen einzigen für w: ein Arm der Curve erstreckt sich vom Anfangspunkte positiv mit positiver Drehung (ad).
3. Negative Werthe für s geben negative für w, und zwar ein negativer für den Fortschritt nur einen einzigen negativen für die Drehung: ein zweiter und letzter Arm der Curve erstreckt sich vom Anfangspunkte aus negativ mit negativer Drehung (af).
4. Gleich großen positiven und negativen Werthen für s entsprechen gleich große positive und negative Werthe für w: beide Arme der Curve sind identisch.
5. Je größer s, positiv oder negativ, desto größer, positiv oder negativ, fällt w aus; $s = \infty$ giebt $w = \infty$: die Arme der Curve wachsen in's Unendlich-Große und mit ihnen ihre Drehung.

II. Uebergangspunkte.

1. Vom Anfangspunkte aus erstrecken sich die Fortschritte entgegengesetzt und die Drehungen

entgegengesetzt: dieser Punkt ist daher ein gemeiner Curvenpunkt (§. 36, 1).

2. Vom Anfangspunkte aus bleiben sowohl die Längen als die Drehungen, seien sie positiv oder negativ, unentgegengesetzt: alle übrige Punkte der Curve sind also ebenfalls gemeine (§. 35, 1). Diese Krumme hat also keinen Uebergangspunkt.

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Differentiirt man die Gleichung, so entsteht

$$dw = a \, . \, ds$$

$$\frac{dw}{ds} = a$$

$$k = a.$$

Die Krümmungsstärke ist unabhängig von den Bestandtheilen, eine beständige Größe, daher an allen Punkten gleich: die Curve ist gleichmäßig gekrümmt.

IV. Die Punkte der größesten und kleinsten Krümmung.

Der Punkt der größesten Krümmung ist daher überall und nirgend an der Curve: überall, denn in jedem beliebigen Punkte ist die Krümmung so groß, daß sie an keinem andern mehr beträgt; nir-

gend; denn in jedem Punkte ist die Krümmung so klein, daß sie an keinem andern Punkte weniger beträgt. — Daher ist auch überall und nirgend der Punkt der kleinsten Krümmung.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

Da $k = a$ (III), so ist

$$k : k' = a : a = 1 : 1.$$

Das Krümmungsverhältniß ist daher gänzlich unabhängig von beständigen Größen, daher die Weise der Krümmung nur eine einzige: die Curve hat also unter allen Bedingungen eine und dieselbe Gestalt, alle Kreise sind einander ähnlich (§. 54).

Die Metamorphose der Curve betrifft also nur ihre Größe.

Die absolute Größe hängt zunächst von dem Verhältniß der absoluten Größen ab, die man als Einheit der Länge und Einheit der Drehung setzt. Je kleiner für dieselbe Länge die Drehung oder je größer für dieselbe Drehung die Länge genommen wird, desto größer die Curve. Da das genannte Verhältniß alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann, so besteht die Metamorphose des Krei-

ses im Ausgehen von der unendlichen Kleinheit, Durchlaufen jeder möglichen Größe und Erweiterung derselben bis in's Unendlichgroße.

Für ein und dasselbe Verhältniß dieser absoluten Größen hängt die Größe der Curve ferner von a ab. Da k die Drehungsgröße für den Bogen = 1 angiebt (§. 42), hier aber k = a, so ist der Kreis desto kleiner, je größer a, oder die Kreise verhalten sich ihrer Größe nach umgekehrt, wie die Werthe, die man dem beständigen Coefficienten von s für verschiedene Fälle ertheilt.

VI. Selbstbedeckung.

Verlegt man durch Behandlung der Kreisgleichung den Anfangspunkt und die Anfangsrichtung an einen und denselben beliebigen Punkt der Curve, so erhält man, dieser Punkt liege wo er wolle, stets dieselbe Gleichung wieder. Es werde der Anfangspunkt zuerst um b vorgeschoben, so muß, wenn die neue Anfangsrichtung mit dem neuen Anfangspunkte in denselben Punkt fallen soll, die frühere um so viel vorwärts gelegt werden, als es dem Fortschritte der Länge gemäß ist. Giebt man aber in der Gleichung $w = as$ dem Fortschritte den Werth b, so erhält man $w = ab$. Man setzt also $s' = s + b$

und $w' = w + ab$, daher $s = s' - b$, $w = w' - ab$ in die Gleichung und erhält dadurch die Gleichung für die Curve von dem neuen beliebigen Anfangspunkte aus:

$$\frac{w' - ab = a(s' - b)}{w' = as'.}$$

Werden Anfangspunkt und Anfangsrichtung zurückgerückt, so ist für diesen Fall $s = s' + b$, $w = w' + ab$, daher abermals

$$w' = as'.$$

Von allen ihren Punkten aus hat also die Curve einen und denselben Verlauf, eine Eigenschaft, die einzig und allein dem Kreise zukommt. Denn bei ungleichförmiger Krümmung ist es höchstens möglich, daß von bestimmten einzelnen Punkten aus ein Theil der Linie früheren Theilen wieder identisch wird. Besteht eine Curve aus einer solchen unendlichen Reihe identischer endlicher Theile, so soll sie eine periodische heißen. Bei ungleichförmiger Krümmung hat vermöge des Begriffes dieser Ungleichförmigkeit von zwei verschiedenen Punkten innerhalb eines einzelnen solchen Theiles (einer Periode) aus die Curve nothwendig einen andern Verlauf, gleich lange Bogen von diesen verschiedenen Punkten aus

haben eine verschiedene Gestalt, daher auch die Gleichungen von beiden Anfangspunkten aus verschieden ausfallen müssen, obwohl sie einer und derselben Curve angehören.

Der Kreis ist also eine periodische Linie, und die einzige von unbestimmter Periode. Denn b war bei jener Umwandlung eine völlig beliebige Größe. Jedes beliebige Stück des Kreises ist mit einem andern von gleicher Länge identisch, also die erste Umdrehung der zweiten und allen folgenden, das Zehntel einer Umdrehung allen übrigen Zehntel-Umdrehungen u. s. f.

Diese Eigenschaft der Curve, von allen Punkten aus, mögen sie im positiven oder im negativen Aste liegen, denselben Verlauf vorwärts und rückwärts zu haben, fordert offenbar, daß jede nächste Umdrehung die folgende bedeckt, oder daß die Linie in sich selbst zurückkehrt. Man kann dieses auf mehrere Arten näher erörtern, z. B. auf folgende Weise. Nachdem der positive Ast der Curve die erste ganze Umdrehung gemacht, hat er an dem Endpunkte derselben, wie jede Curve, wieder die Anfangsrichtung. Von diesem wie von jedem andern Punkte an sind alle folgende Theile, hier also alle folgende Umdrehungen mit der ersten identisch,

weil die Gleichung, wenn man den Endpunkt der Umdrehung als neuen Anfangspunkt setzt, genau die vorige ist. Es werden also auch alle folgende Umdrehungen die erste bedecken, sofern noch nachgewiesen werden kann, daß das Ende der ersten Umdrehung mit ihrem Anfange nicht blos die Richtung, wie schon bemerkt, sondern auch den Anfangspunkt gemein hat. Die Nothwendigkeit hiervon ist klar. Die zweite halbe Umdrehung ist, man mag sie vorwärts oder rückwärts nehmen, mit der ersten halben Umdrehung identisch. Denkt man sich Anfangs- und Endpunkt der ersten halben Umdrehung durch eine Gerade verbunden, so ist die zweite, auf der andern Seite der Geraden, nicht nur identisch mit der ersten, sondern liegt auch identisch mit ihr in Bezug auf die Gerade, da Endpunkt und Endrichtung der ersten mit Anfangspunkt und Anfangsrichtung der zweiten zusammenfällt. Also muß die erste so auf der einen Seite der Geraden liegen, wie die zweite identische auf der andern. Da nun die erste mit dem Anfangspunkte von der Geraden ausgeht, so muß auch die zweite mit dem Endpunkte in demselben Punkte die Gerade treffen, indem die zweite vorwärts genau eben so, wie rückwärts verläuft. Daher kehrt die erste Umdrehung und damit

alle folgenden in sich selbst zurück. Diese Darstellung leidet auf den negativen Ast gleiche Anwendung, daher auch dieser nach einmaliger Umdrehung fortwährend sich selbst bedeckt. Beide aber, der positive und negative Kreis fallen wiederum zusammen, da sie identisch sind (I, 4) und im Anfangspunkte diesen so wie die Tangente gemein haben, auch auf einer Seite derselben liegen.

VII. Convexität und Concavität.

1) Da alle Punkte des Kreises gemeine Curvenpunkte sind (II), so bleiben Convexität wie Concavität stets auf derselben Seite (§. 58, 1).

2) Da die Curve eine geschlossene Linie ohne Uebergangspunkte ist und sie daher stets zwischen zwei Tangenten beliebiger Punkte fällt, so kehrt sie sich selbst überall die concave Seite zu (§. 60, 1, a, α und b, α; vergl. 2). Diese ist also die innere Seite der Linie.

VIII. Selbstausmessung.

Die Ausmessung eines jeden Linien-, Flächen- und Körpergebildes und so auch der Curve durch einen ihrer eignen Theile giebt uns einen reellen Aufschluß über das Wesen des Gebildes und ist

für die Erkenntniß der Curve als solche interessanter und wichtiger, als selbst die Rectification, deren Ergebniß immer nur eine relative Eigenschaft verkündet, die zwar für den Gebrauch von höchster Wichtigkeit ist, uns aber erst einen Zusammenhang bedeutender Wahrheiten aufschließt, sofern wir die rectificirte Linie durch das Mittel der Rectification einer Anzahl verwandter Curven mit diesen, in Bezug auf Ausdehnung und Maaß, vergleichen, welches aber freilich ein indirecter Weg bleibt, den man besser mit einem directen vertauscht; und es verdient die Verfolgung desselben Gegenstand späterer Untersuchungen zu werden.

Was den Kreis betrifft, so gewährt die Selbstausmessung auch hier das einfachste Resultat.

1) Soll die Länge eines Bogens durch einen andern ausgemessen werden, so müssen natürlich Beide, Maaßstab und zu Messendes, durch die entsprechenden Drehungsgrößen gegeben sein. Wie sich diese verhalten, so die beiden Bogen, wie eine einfache Betrachtung der Gleichung lehrt.
2) Umgekehrt kann man auch die Selbstausmessung der Curve rücksichtlich der Drehungen in Frage ziehen. Denn man sieht nicht ein, warum der eine Bestandtheil vor dem andern bevorzugt sein

sollte. Für diesen Fall müssen die Bogen, deren Drehungsgrößen durch einander gemessen werden sollen, durch die Längen gegeben sein. Die Gleichung ergiebt sogleich das Resultat, daß sich die Drehungen zweier Bogen wie ihre Längen verhalten.

§. 63.

Unter I bis VIII §. 62 sind die sämmtlichen absoluten Eigenschaften der Kreislinie unmittelbar aus ihrem Begriffe, der Gleichung, abgeleitet, und es ist dadurch die vollständige Erkenntniß der Linie an und für sich gewonnen. Eine solche in sich abgeschlossene erschöpfende Forschung gewährt eine wohlthuende wissenschaftliche Befriedigung, und hat bei den meisten Curven selbst einen großen Reiz durch den Gewinn der Ergebnisse, da diese selten so wie bei dem Kreise auf der Hand liegen und bekannt sind, sondern entweder gar nicht, oder nur fragmentarisch und auf indirecten Wegen erforscht wurden. Sogar für die Erkenntniß der Natur der Kreislinie (die nicht die vollkommenste oder gar die schönste, wohl aber, laut ihren absoluten Eigenschaften, die einfachste, bei der höchsten Symmetrie und augenfälligsten Harmonie der Mannigfaltigkeit

gänzlich entbehrende, daher die gemeinste, eintönigste und plumpste Krumme ist) möchte die Beleuchtung des, wenn gleich nicht neuen, doch oft nur dunkel gedachten Geheimnisses ihrer Natur, eine Curve mit zwei unendlich sich drehenden, unendlich fortschreitenden Armen, eine im buchstäblichen Sinne weder anfangende noch endende Curve zu sein (denn der Anfangspunkt ist nur ein gesetzter, das Aneinanderstoßen der beiden entgegengesetzten Arme zeigt, daß er nicht zu ihrem Wesen gehört), als ein kleiner Gewinn erscheinen.

Zweites Kapitel.

Die einfachste Curve nach der Kreislinie.

§. 64.

Wird in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades unter den beiden veränderlichen Bestandtheilen zunächst gesetzt

$A = 0$, $B = 0$, C von endlichem Werthe, so entsteht die Gleichung

$$(1)\quad Cs^2 + Dw + Es + F = 0.$$

Die absoluten Eigenschaften der Krummen, welche dieser Gleichung entspricht, sollen untersucht werden.

Daß eine allgemeine von dem untersten Gliede an vollständige Gleichung, wie diese, nicht nur ihre Curve (oder Curven) selbst von einem bequemen characteristischen Anfangspunkte aus und in einer einzigen Lage (wie es doch für die Aufsuchung ihrer absoluten Eigenschaften am vortheilhaftesten ist), sondern von jedem beliebigen Anfangspunkte aus und in jeder möglichen Lage giebt, zeigte sich schon bei der Analyse der Kreisgleichung, und soll hier, um dieses Verhältniß ein für allemal recht klar zu machen, durch Aufsteigen von der speciellsten Form der vorliegenden Gleichung zu ihrer generellen wieder nachgewiesen, und darauf erst die Gleichung in ihrer einfachsten Gestalt zur Ableitung der absoluten Eigenschaften benutzt werden.

§. 65.

I. Setzt man in (1) die 3 letzten Coefficienten $= 0$, so bezeichnet die Gleichung den Anfangspunkt; werden D und E oder D und $F = 0$ genommen, so ergiebt sich eine Gerade, im erstern Falle jedoch entspricht ihr dann gar kein räumliches

Gebild, wenn die Vorzeichen der Coefficienten gleich sind.

II. Setzt man E und $F = 0$, so erhält man

$$(2)\ Cs^2 + Dw = 0,$$

deren Lösung in Beziehung auf beide Veränderliche ist

$$(3)\ w = -\tfrac{C}{D}s^2,\quad (4)\ s = \pm\sqrt{\left(-\tfrac{D}{C}w\right)}.$$

Haben hier C und D gleiche Vorzeichen, so bleiben die Ausdrücke unverändert, wenn man diese Coefficienten positiv denkt; haben sie verschiedene Vorzeichen, so entsteht unter dieser Bedingung

$$(5)\ w = \tfrac{C}{D}s^2,\quad (6)\ s = \pm\sqrt{\left(\tfrac{D}{C}w\right)}.$$

Es ist zweckdienlich, diese letzten Gleichungen schon hier einer einfachen Analyse zu unterwerfen, und dadurch der Untersuchung der ersten absoluten Eigenschaften vorzugreifen.

Für $s = 0$, ist auch $w = 0$: die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung.

Jeder positive und jeder negative Werth für s in (5) giebt einen positiven Werth für w: die Curve hat zwei vom Anfangspunkte nach entgegengesetzten Richtungen auslaufende Aeste mit positiver Drehung (ad und ag, Fig. 21).

Diese Aeste sind identisch, denn irgend ein po-

sitiver Werth für s giebt denselben Werth für w, wie ein ihm an Größe gleicher negativer.

Auch sind diese Aeste unendlich lang, denn $s = \infty$ giebt $w = \infty$. Dasselbe gilt von der Drehung.

Es sind nur diese beiden Aeste vorhanden, denn die negativen Werthe für w in (6) machen s unmöglich.

Eine ähnliche Betrachtung der Gleichungen (3) und (4) und ihre Vergleichung mit (5) und (6) lehrt, daß sie dieselbe Curve bezeichnen, nur hat sie hier die zweite Lage (ah und af), die sie nach der Gleichung noch erhalten kann, durch welche letztere die Richtung der Curve im Anfangspunkte die Anfangsrichtung ist.

III. Für $D = 0$ erhält man aus (1)

$$s = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{E^2 - 4FC}{4C^2}\right)},$$

also eine Gerade, oder, wenn $4FC$ positiv und $> E^2$, durch Unmöglichkeit des 2ten Gliedes des Ausdruckes gar keine räumliche Repräsentation.

IV. Nimmt man nur $E = 0$, so entstehen die Lösungen

$$(7) \quad w = -\frac{C}{D} s^2 - \frac{F}{D},$$

$$(8) \quad s = \pm \sqrt{\left(-\frac{D}{C} w - \frac{F}{C}\right)}.$$

Seien in (7) C und D, auch F und D von verschiedenen Vorzeichen, so geht hervor:

$$(9)\ w = \frac{C}{D} s^2 + \frac{F}{D},$$

worin nun die Coefficienten an sich positiv sind. $s = 0$ giebt $w = \frac{F}{D}$. Im Anfangspunkte hat die Curve nicht die Anfangsrichtung, also eine andere und zwar mehr positiv gewendete Lage gegen ab, als in (5). Uebrigens ist die Curve dieselbe, denn sobald man ihr durch Verschiebung dieselbe Lage wie in (5) giebt, also ihr im Anfangspunkte die Anfangsrichtung ertheilt, indem $w' = w - \frac{F}{D}$ gesetzt wird, erhält man durch Einschiebung des hieraus folgenden Werthes von w in (9)

$$w' = \frac{C}{D} s^2,$$

welches wieder Gleichung (5) ist.

Giebt man den Vorzeichen der einzelnen Coefficienten in (7) noch die drei möglichen andern Relationen, so erhält man die Gleichungen der Linie in ihren 3 übrigen noch möglichen Lagen. Diese 4 und die 2 schon unter II nachgewiesenen kommen mit den 6 möglichen Lagen des Kreises überein (§. 30, 6 und 7).

V. Setzt man nur $F = 0$, so entsteht aus (1), wenn zugleich ungleiche Vorzeichen für C und D sowohl als für E und D gesetzt werden,

$$(10)\ w = \frac{C.s^2 + Es}{D},$$

$$(11)\ s = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2}}{2C},$$

worin also die Coefficienten an sich nun positiv sind.

$s = 0$ giebt $w = 0$: die Richtung der Curve im Anfangspunkte ist die Anfangsrichtung.

Für jeden positiven Werth von s ist auch w positiv, und zwar wächst w mit s, denn Es wird mit der Zunahme von s größer und Cs^2-ebenfalls, da mit der Größe ihr Quadrat wächst. Auch nimmt mit s das w in's Unendliche zu. Also liegt der eine vom Anfangspunkte auslaufende positive Zug als ein unendlicher auf der positiven Seite des Fortschrittes mit positiver Drehung, die unendlich groß wird (dpk, wenn d der Anfangspunkt, dm die Anfangsrichtung ist).

Giebt man s einen negativen Werth, so entsteht für jeden solchen ein Werth für w, der mit dem negativen s in's Unendliche wächst: denn der Werth von w in (10) muß zuletzt in's Unendliche zunehmen, da, sobald ein gewisser Werth überschritten ist, das Quadrat (Cs^2), welches positiv bleibt, die erste Potenz (Es), die negativ bleibt, immer mehr überragt. Folglich läuft ein zweiter Zug vom An-

fangspunkte aus nach der entgegengesetzten Richtung in's Unendliche. Die ganze Curve ist also eine einfache nach 2 Seiten unendliche Linie. Aber der zweite Ast ist erst vorläufig verfolgt, und es zeigt sich weiter, daß für den negativen Fortschritt w zuerst negativ wird, im Negativen wächst, ein Maximum desselben erreicht, wieder abnimmt bis zu 0 und dann in's Positive übergeht, worin es bis zum Unendlichgroßen steigt, wie dieses folgende Untersuchung ausweis't. Da das Fallen und Wachsen des Werthes von w in (10)' nur vom Zähler abhängt, so fragt es sich: für welchen Werth von s ist $Cs^2 + Es$ ein Maximum unter der Bedingung, daß s negativ sei? Werde das Maximum durch M bezeichnet, so haben wir die Forderung

$$Cs^2 + Es = M$$

$$(12) \quad s = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4CM}}{2C}.$$

Hierin erhalte M seinem Begriffe gemäß den höchsten Werth, den die Bedingungen zulassen. Der unbedingt höchste ist $M = +\infty$. Negativ unendlich aber kann M nicht werden, weil dadurch wegen des Wurzelzeichens s unmöglich ausfällt. Für $M = \infty$ ab.r wird $s = \pm\infty$, von welchen Werthen der untere der Bedingung entspricht. Das

positive Maximum des Ausdrucks $Cs^2 + Es$ entsteht also für $s = -\infty$, wie schon oben bemerkt wurde.

Aber es fragt sich, ob nicht auch ein negatives Maximum Statt habe? Der höchste negative Werth, den M annehmen darf, ist der, durch welchen $E^2 + 4CM$ noch nicht negativ wird, weil sonst wegen des Wurzelzeichens s unmöglich würde. Also ist die Bedingung

$$E^2 + 4CM = 0$$

$$M = -\frac{E^2}{4C}.$$

Diesen Werth für M in (12) eingesetzt ergiebt

$$s = -\frac{E}{2C}.$$

Für diesen Werth von s also erreicht $Es^2 + Es$, also auch w sein negatives Maximum.

Um Zu- und Abnahme des w vollständig verfolgen zu können, muß nun noch untersucht werden, für welche Werthe von s der mehrgedachte Ausdruck ein Minimum werde? Wenn m dieses bezeichnet, so ist die Bedingung

$$Cs^2 + Es = m$$

$$s = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4Cm}}{2C}.$$

Der kleinste Werth ist $m = 0$. Dafür wird

$$s = \begin{cases} 0 \\ -\frac{E}{C} \end{cases}$$

wodurch die Frage beantwortet ist.

Das Ergebniß der geführten Untersuchung ist also folgendes. Für die negativen Werthe von $s = 0$ bis zu $s = -\frac{E}{2C}$ wächst w im Negativen, nimmt wieder von $s = -\frac{E}{2C}$ bis zu $s = -\frac{E}{C}$, bis zu 0 im Negativen ab, und wird für alle größeren negativen Werthe von s wieder positiv, darin bis in's Unendliche wachsend. Der negative Ast der Curve (dag) hat also eine wachsende negative Drehung bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{2C}$ (in der Fig. a), welcher ein Wendungspunkt ist, weil von da an bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{C}$ (in der Fig. g) (wo die Curve wieder die Anfangsrichtung hat und die Drehung in's Positive übergeht), die negative Drehung abnimmt (§. 10).

Der Umstand, daß die beiden Punkte, worin die Curve zum ersten und zweiten Male die Anfangsrichtung hat (d und g) gleich weit vom Wendungspunkte (a) entfernt liegen, läßt vermuthen, sie habe zwei identische Arme vom Wendungspunkte aus. Um dieses zu untersuchen verlege man den Anfangspunkt nach a, und ändere zugleich die An-

fangsrichtung der Curve in diejenige Richtung, die sie in a hat. Da nun da $= -\frac{E}{2C}$, die zu diesem Bogen gehörige Richtungsänderung durch Einschiebung dieses Werthes von s in Gleichung (10) als $-\frac{E^2}{4CD}$ gefunden wird, so ist, wenn man die Fortschritte vom neuen Anfangspunkte aus durch s', die Drehung von der neuen Aufangsrichtung aus durch w' bezeichnet,

$$s = s' - \frac{E}{2C}, \quad w = w' - \frac{E^2}{4CD}.$$

Durch Einschiebung dieser Werthe in die alten Gleichungen (10) und (11) entsteht

$$(13) \quad w' = \frac{C}{D} \cdot s'^2, \quad (14) \quad s' = \pm \sqrt{\frac{D}{C} w'},$$

woraus sogleich die Identität der beiden Arme von dem nun gewählten Anfangspunkte und der neuen Anfangsrichtung aus folgt, indem Gleichung (13) für die positiven Werthe von s dieselben Werthe für w liefert, die die größengleichen negativen ergeben.

Außerdem zeigt sich hieraus, daß die Curve einerlei mit der durch (5) und (6) dargestellten ist.

Die noch übrigen möglichen Relationen der Vorzeichen der Coefficienten in der aus (1) durch die Bedingung $F = 0$ entstehenden Gleichung ergeben wieder die noch übrigen möglichen Lagen der Linie.

Uebrigens kann man die Untersuchung, ob eine Curve zwei identische Arme habe, von vorn herein führen, ohne schon, wie es hier der Fall war, zu wissen, wo der Vereinigungspunkt beider problematisch identischen Arme liegt. Um z. B. in unserm Falle zu untersuchen, ob es einen solchen Punkt giebt und wo er liegt, setze man in Gl. (10) die Bedingung, daß w größengleich ausfalle für den positiven und negativen Werth von s, also

$$Cs^2 + Es = Cs^2 - Es,$$

woraus folgt $Es = 0$. Also müßten die entstehenden Gleichungen die Form haben

$$w' = \frac{C}{D} s'^2, \qquad s' = \pm \sqrt{\left(\frac{D}{C} w'\right)}.$$

Es fragt sich, ob es einen Werth von der Form $s' + x$ für s, und von der Form $w' + y$ für w gebe, durch dessen Einschiebung in Gl. (10) diese die eben geforderte Gestalt erhielte, und welcher Werth dieses sei. y ist von x abhängig und wird gefunden, wenn man in (10) dem s den Werth x ertheilt, daher $y = \frac{Cx^2 + Ex}{D}$. Wir hätten also durch Einschiebung von $w' + y$ für w und von $s' + x$ für s in (10)

$$w' + y = \frac{C(s' + x)^2 + E(s' + x)}{D}$$

$$w' + \frac{Cx^2 + Ex}{D} = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x)}{D}$$

$$w' = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x) - Cx^2 - Ex}{D}$$

Diese Function sollte dieselbe sein mit

$w' = \frac{C}{D}s'^2$, weshalb also

$$\frac{C}{D}s'^2 = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x) - Cx^2 - Ex}{D}$$

$$x = -\frac{E}{2C},$$

wie oben, und daraus $y = -\frac{E^2}{4CD}$. Durch Einsetzung von $s' - \frac{E}{2C}$ für s und von $w' - \frac{E^2}{4CD}$ für w in $w = \frac{Cs^2 + Es}{D}$ erhält man, wie verlangt worden,

$$w' = \frac{C}{D}s'^2.$$

VI. Setzt man in (1) alle drei Coefficienten endlich, so sind die Lösungen dieser Gleichung

$$w = \frac{-Cs^2 - Es - F}{D}, \quad s = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2 - 4CF}}{2C}$$

Für $s = 0$ in der ersten dieser Gleichungen ist $w = -\frac{F}{D}$. Da nun w hier stets dieselben Werthe wie in der Gleichung (10) bei eben solcher Relation der Vorzeichen in dieser letzteren erhält, außer daß $\frac{F}{D}$ hinzu oder abkommt, dieses aber schon für den

Werth von $s = 0$ geschieht, so haben wir ganz dieselbe Curve wie unter V, nur daß sie hier die höchste und zwar vollkommene Freiheit der Lage gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält.

§. 66.

Aus §. 65, I bis VI geht hervor, daß der allgemeinen Gleichung

$$Cs^2 + Dw + Es + F = 0,$$

wenn sowohl C als D endlich gesetzt werden, eine einzige Curve entspricht, welche durch die Abänderung sowohl der Vorzeichen als der Größen der Coefficienten alle möglichen Lagen gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält, und die in einer einzigen und zwar der einfachsten Lage durch die Gleichung

$$w = \frac{C}{D} s^2$$

bezeichnet wird. Diese Form der Gleichung wird daher auch die bequemste für die Ableitung der absoluten Eigenschaften der Curve sein. Zur Abkürzung setzt man noch $\frac{C}{D} = a$. Die Gleichung

$$w = a \cdot s^2, \quad s = \pm\sqrt{\frac{w}{a}},$$

worin a positiv ist, enthält also den Begriff der Curve an sich.

Es ist im Gange der Entwickelung (§. 65, V, am Schluß) ein Weg gezeigt, auf welchem diese einfachste Form der zu untersuchenden Gleichung kurz und ohne Weiteres gefunden wurde. Ich schlug ihn nicht sogleich ein, weil meine Absicht war, dem minder geübten Leser in diesem Beispiele recht anschaulich zu zeigen, wie die allgemeinste Gleichung einer Curve ihren bloßen Begriff in die Bedingungen ihrer Lage hüllt, und auf welche Weise man beides von einander sondern kann.

§. 67.

Von den absoluten Eigenschaften dieser Linie (welche, so wie alle folgende Curven auf den Tafeln III und IV, streng richtig nach Zahl und Maaß Fig. 21 gezeichnet ist) wurden schon §. 65, II die ersten absoluten Eigenschaften abgeleitet, die wir hier (unter I) kurz wieder zusammenfassen und dann die übrigen beifügen wollen.

I. Lauf im Allgemeinen.

Die Curve hat zwei vom Anfangspunkte nach entgegengesetzten Richtungen auslaufende unendlich lange, beide positiv und unendlich sich windende identische Aeste.

II. Uebergangspunkte.

Der Anfangspunkt ist ein Wendungspunkt (§. 36, 2), alle übrige sind gemeine Curvenpunkte (§. 35, 1).

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Die Differentialgleichung ist $dw = 2\,as\,.\,ds$, und daraus

$$\frac{dw}{ds} = 2as = k.$$

IV. Die Punkte der größten und kleinsten Krümmung.

Der Punkt der kleinsten Krümmung ist der Anfangspunkt; hier ist die Krümmung $= 0$, da in der Krümmungsgleichung für $s = 0$, $k = 0$ wird.

Der Punkte der größten Krümmung sind 2, sie liegen vom Anfangspunkte aus nach entgegengesetzten Richtungen im Unendlichen, da für $s = \pm\infty$, auch $k = \infty$. Besser ausgedrückt: die Curve strebt nach zwei Seiten endlos den Punkten der größten Krümmung nach, ohne sie je zu erreichen; in irgend einem Punkte ihres Laufes hat sie immer eine größere Krümmung, als in allen vorhergehenden desselben Astes, eine kleinere, als in allen folgenden.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

$$k : k' = 2as : 2as' = s : s'.$$

Die Krümmungsstärken verhalten sich wie die Bogenlängen, oder, da $s = \frac{\pm\sqrt{w}}{\sqrt{a}}$, $s' = \frac{\pm\sqrt{w'}}{\sqrt{a}}$, wie die Quadratwurzeln aus den Drehungsgrößen.

Hierauf gestützt hat die Untersuchung §. 53, Beispiel 2, b schon gelehrt, daß sich die Curve unter allen Bedingungen nur auf eine einzige Weise krümmt. Sie hat also eine unveränderliche Gestalt.

Die Metamorphose betrifft demnach nur ihre Größe, die vom unendlich Kleinen stetig zum unendlich Großen übergeht (Vergl. §. 62, V).

VI. Selbstausschließung.

Daß die Curve keine periodische ist, und sich jeder Ast derselben immer mehr in sich selbst einwickeln oder jede folgende Windung die vorige ausschließen muß, folgt schon aus den bisherigen Betrachtungen. (Ebenso die Concavität jedes Astes auf der inneren Seite, so wie der Wechsel derselben im Wendungspunkte.)

Die Curve gehört daher zu den Doppel-Spiralen nach innen gewunden. Obgleich die ein-

fachste aller krummen Linien nach dem Kreise, war sie doch, so viel ich weiß, bis jetzt nicht bekannt.

VII. Selbstausmessung.

$$s : s' = \frac{\pm\sqrt{w}}{\sqrt{a}} : \frac{\pm\sqrt{w'}}{\sqrt{a}} = \sqrt{w} : \sqrt{w'};$$

$$w : w' = as^2 : a \,.\, s'^2 = s^2 : s'^2.$$

Die Bogenlängen vom Anfangspunkte aus verhalten sich wie die Quadratwurzeln der entsprechenden Drehungsgrößen; umgekehrt verhalten sich diese wie die Quadrate der Bogenlängen.

Drittes Kapitel.

Die Wechselkrumme der einfachsten ungleichmäßig gekrümmten (im vorigen Kapitel behandelten) Linie.

§. 68.

Nach dem §. 34 gegebenen Begriffe von Wechselkrummen ist die Gleichung der gedachten Linie

$$s = aw^2, \quad w = \pm\sqrt{\frac{s}{a}}.$$

Sie könnte als Wechselkrumme der Curve $w = as^{2}$ auf den Titel der einfachsten ungleichmäßig gekrümmten Linie ebenfalls Anspruch machen, so daß eigentlich nicht eine Linie, sondern ein Paar Wechselkrumme die einfachsten ungleichförmig gekrümmten Linien wären. Doch muß bemerkt werden, daß in der Curve, der der Vorrang gegeben ist, nur der Bogen, in der hier zu untersuchenden aber der Winkel auf die 2te Potenz erhoben ist. Die Drehung ist aber, wie schon früher bemerkt, höherer Natur, als der Fortschritt. Dieser Unterschied zeigt sich auch in den Eigenschaften. Die beiden Aeste der ersten Linie schneiden sich nicht, wie die der zweiten, welche eine Knotenlinie ist; wogegen zwar diese den Parallelismus der Windungen jedes einzelnen Astes voraus hat, da sie bei jener ungleich laufen.

§. 69.

I. Lauf im Allgemeinen.

1. Die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung, da für $s = 0$ auch $w = 0$ (ab, Fig. 22 und 23).
2. Jeder positive Werth für w ergiebt einen positiven für s: ein Arm der Curve erstreckt sich

vom Anfangspunkte aus positiv mit positiver Drehung (adf, Fig. 22 und 23).

3. Negative Werthe für w geben ebenfalls positive für s: ein zweiter Arm erstreckt sich vom Anfangspunkte aus positiv mit negativer Drehung (agh, Fig. 23).

4. Negative Werthe für s geben unmögliche für w: die Curve hat also nur diese beiden Arme.

5. Gleich großen positiven und negativen Werthen für w entsprechen gleich große positive Werthe für s: die beiden Arme der Curve sind identisch.

6. Je größer w, positiv oder negativ, desto größer auch s; $w = \infty$ giebt $s = \infty$. Die Arme der Curve wachsen in's Unendlichgroße und mit ihnen ihre Drehung.

II. Uebergangspunkte.

Der Anfangspunkt ist (wegen §. 36, 3) eine Spitze, alle übrige Punkte sind gemeine Curvenpunkte (§. 35, 1).

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Differentiirt man die Gleichung, so entsteht

$$2aw \,.\, dw = ds.$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2aw}$$

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} = k.$$

IV. Die Punkte der größten und kleinsten Krümmung.

1. Für $w = 0$ wird k unendlich groß. Der Punkt der größten Krümmung ist also der Anfangspunkt.

2. Je größer w wird, desto kleiner k; für w unendlich groß ist k unendlich klein. Die Krümmung nimmt also vom Anfangspunkte aus immer ab, und jeder Arm der Curve strebt dem Punkte der kleinsten Krümmung endlos nach, und erreicht ihn im Unendlichen, d. h. nie.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

$$k : k' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} : \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w'}$$

$$k : k' = \frac{1}{w} : \frac{1}{w'} = w' : w.$$

Daher verhalten sich die Krümmungsgrade zweier Punkte umgekehrt wie die Drehungsgrößen, oder

umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Bogenlängen.

Da auch bei dieser Curve das Krümmungsverhältniß $w' : w$ unabhängig von beständigen Größen, auch von der des absoluten Werthes der Drehungseinheit ist, so hat die Curve eine unveränderliche Gestalt (§. 54.) und erscheint nur in allen möglichen Größen.

VI. Selbsteinschließung.

Aus dem Krümmungsgesetze geht hervor, daß jede folgende Windung eines und desselben Astes die vorige einschließen oder daß sich jeder Arm fortwährend aus sich selbst herauswickeln muß. Die Kr. ist also eine Spirale und zwar eine Doppel-Spirale nach außen (gewunden). An beiden Aesten bleibt die Concavität stets auf derselben Seite, auf der inneren.

VII. Selbstausmessung.

Es ist $s : s' = aw^2 : aw'^2 = w^2 : w'^2$.

Die Bogen vom Anfangspunkte aus verhalten sich wie die Quadrate der Drehungsgrößen. Nimmt man also die Drehungen

1, 2, 3, 4, 5 ...,

so erhält man als die entsprechenden Bogenlängen (für $a = 1$)

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ .....$$

Setzt man also als Drehungseinheit eine ganze Umdrehung, so hat man für die 1ste, 2te, 3te, 4te, 5te Windung der Curve die Bogenlängen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \text{rc.}$$

Die Krumme stellt in diesem Sinne eine arithmetische Progression mit dem Anfangsgliede 1 und der Differenz 2 dar. Man sieht dieß allgemein, wenn man die Länge der n^{ten} Windung von der der $n + 1^{ten}$ abzieht.

1. Die Länge der n^{ten} Windung. Man erhält sie, indem man von der Größe aller n Windungen die von $n - 1$ Windungen abzieht. Für $w = n$ ist aber $s = an^2$ und für $w = n - 1$ ist $s = a(n^2 - 2n + 1)$. Daher die Länge der n^{ten} Windung =

$$an^2 - (an^2 - 2an + a) = a(2n - 1).$$

2. Die Länge der $n + 1^{ten}$ Windung. Wird von der Länge aller n 1 Wind. die von n Wind. subtrahirt, so entsteht als Größe der $n + 1^{ten}$ Windung

$$a(2n+1).$$

3. Daher ist die Differenz zweier benachbarten Windungen $= a(2n+1) - a(2n-1) = 2a$, und daher $= 2$ für $a = 1$.

Will man die Drehungen durch die Längen ausmessen, so ergiebt die Gleichung

$$w : w' = \pm\sqrt{s} : \pm\sqrt{s'},$$

d. i. die Drehungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Bogenlängen.

Anmerk. Setzt man $s = aw^3$, so entwickelt diese cubische Spirale ebenfalls 2 Arme, die jedoch eine andere gegenseitige Lage haben. Denn hier geben die positiven Werthe für w positive für s, die negativen negative; man hat also 2 entgegengesetzte Arme mit entgegengesetzter Drehung. Der zweite Ast läuft also nicht wie agh Fig. 23, sondern in der Richtung von a nach f. Zwei Züge solcher Art hat jede Spirale von der Gleichung $w^{2n+1} = s$, zwei Arme aber wie Fig. 23 jede von der Form $w^{2n} = s$, wo in beiden Fällen n eine positive ganze Zahl ist. Der Anfangspunkt aller Linien der letzten Art ist eine Spitze, aller Linien der ersten Art ein gemeiner Curvenpunkt.

Die Spirale $s = aw^3$ holt bei weitem stärker aus als $s = aw^2$ und entfernt sich daher rascher vom Anfangspunkte. Denn nach der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Umdrehung beträgt ihre Länge 1, 8, 27, 64 ꝛc.

Viertes Kapitel.

Die Linie (1) $s = \pm\sqrt{(w - w^2)}$, (2) $w = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - s^2)}$, oder die Linie der Kreisgleichung (aus dem Scheitelpunkte) unter rechtwinkligen Coordinaten, für den Durchmesser = 1.

§. 70.

I. Lauf im Allgemeinen. Uebergangspunkte. Perioden. Versetzung des Anfangspunktes und der Anfangsrichtung.

1. Setzt man in Gl. (1) $w = 0$, so ist $s = 0$: im Anfangspunkte hat die Curve die Anfangsrichtung (ab, Fig. 24).

2. Negative Werthe für w machen s unmöglich.

Für die Reihe der positiven Werthe von w hat s (Gl. 1) zwei Reihen identischer Werthe, eine positive Reihe und eine negative. Die Curve hat also zwei und nicht mehr Aeste. Diese sind identisch und laufen vom Anfangspunkte aus: der eine positiv (ad ɔc.) der andere negativ (ag ɔc.), beide mit positiver Drehung.

3. Der Anfangspunkt ist daher ein Wendungspunkt (§. 36, 2).

4. Da die Radicalgröße in (1) nicht negativ werden darf, wenn nicht s unmöglich werden soll, so ist die Bedingung des höchsten Werthes für w

$$\frac{w - w^2 = 0}{1 = w.}$$

w kann also nur die Reihe der Werthe von 0 bis 1 annehmen: das Maximum der Drehung der Curve vom Anfangspunkte aus ist die Drehungseinheit. (Diese erhalte in Fig. 24 die absolute Größe von 2 R.)

5. In Gl. (2) erhalte s den höchsten Werth, den es anzunehmen vermag. Dieser ist $\frac{1}{4} - s^2 = 0$, oder $s = \pm \frac{1}{2}$. Für diesen Werth wird $w = \frac{1}{2}$. Der kleinste Werth für s ist $= 0$, wofür

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

$$k : k' = 2as : 2as' = s : s'.$$

Die Krümmungsstärken verhalten sich wie die Bogenlängen, oder, da $s = \frac{\pm\sqrt{w}}{\sqrt{a}}$, $s' = \frac{\pm\sqrt{w'}}{\sqrt{a}}$, wie die Quadratwurzeln aus den Drehungsgrößen.

Hierauf gestützt hat die Untersuchung §. 53, Beispiel 2, b schon gelehrt, daß sich die Curve unter allen Bedingungen nur auf eine einzige Weise krümmt. Sie hat also eine unveränderliche Gestalt.

Die Metamorphose betrifft demnach nur ihre Größe, die vom unendlich Kleinen stetig zum unendlich Großen übergeht (Vergl. §. 62, V).

VI. Selbstausschließung.

Daß die Curve keine periodische ist, und sich jeder Ast derselben immer mehr in sich selbst einwickeln oder jede folgende Windung die vorige ausschließen muß, folgt schon aus den bisherigen Betrachtungen. (Ebenso die Concavität jedes Astes auf der inneren Seite, so wie der Wechsel derselben im Wendungspunkte.)

Die Curve gehört daher zu den Doppel-Spiralen nach innen gewunden. Obgleich die ein-

fachste aller krummen Linien nach dem Kreise, war sie doch, so viel ich weiß, bis jetzt nicht bekannt.

VII. Selbstausmessung.

$$s : s' = \frac{\pm \sqrt{w}}{\sqrt{a}} : \frac{\pm \sqrt{w'}}{\sqrt{a}} = \sqrt{w} : \sqrt{w'};$$

$$w : w' = as^2 : a \,.\, s'^2 = s^2 : s'^2.$$

Die Bogenlängen vom Anfangspunkte aus verhalten sich wie die Quadratwurzeln der entsprechenden Drehungsgrößen; umgekehrt verhalten sich diese wie die Quadrate der Bogenlängen.

Drittes Kapitel.

Die Wechselkrumme der einfachsten ungleichmäßig gekrümmten (im vorigen Kapitel behandelten) Linie.

§. 68.

Nach dem §. 34 gegebenen Begriffe von Wechselkrummen ist die Gleichung der gedachten Linie

$$s = aw^2, \quad w = \pm \sqrt{\tfrac{s}{a}}.$$

Sie könnte als Wechselkrumme der Curve $w = as^{r}$ auf den Titel der einfachsten ungleichmäßig gekrümmten Linie ebenfalls Anspruch machen, so daß eigentlich nicht eine Linie, sondern ein Paar Wechselkrumme die einfachsten ungleichförmig gekrümmten Linien wären. Doch muß bemerkt werden, daß in der Curve, der der Vorrang gegeben ist, nur der Bogen, in der hier zu untersuchenden aber der Winkel auf die 2te Potenz erhoben ist. Die Drehung ist aber, wie schon früher bemerkt, höherer Natur, als der Fortschritt. Dieser Unterschied zeigt sich auch in den Eigenschaften. Die beiden Aeste der ersten Linie schneiden sich nicht, wie die der zweiten, welche eine Knotenlinie ist; wogegen zwar diese den Parallelismus der Windungen jedes einzelnen Astes voraus hat, da sie bei jener ungleich laufen.

§. 69.

I. Lauf im Allgemeinen.

1. Die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung, da für $s = 0$ auch $w = 0$ (ab, Fig. 22 und 23).
2. Jeder positive Werth für w ergiebt einen positiven für s: ein Arm der Curve erstreckt sich

vom Anfangspunkte aus positiv mit positiver Drehung (adf, Fig. 22 und 23).

3. Negative Werthe für w geben ebenfalls positive für s: ein zweiter Arm erstreckt sich vom Anfangspunkte aus positiv mit negativer Drehung (agh, Fig. 23).

4. Negative Werthe für s geben unmögliche für w: die Curve hat also nur diese beiden Arme.

5. Gleich großen positiven und negativen Werthen für w entsprechen gleich große positive Werthe für s: die beiden Arme der Curve sind identisch.

6. Je größer w, positiv oder negativ, desto größer auch s; $w = \infty$ giebt $s = \infty$. Die Arme der Curve wachsen in's Unendlichgroße und mit ihnen ihre Drehung.

II. Uebergangspunkte.

Der Anfangspunkt ist (wegen §. 36, 3) eine Spitze, alle übrige Punkte sind gemeine Curvenpunkte (§. 35, 1).

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Differentiirt man die Gleichung, so entsteht

die erste bedeckende, Fläche entstand, ihre Nichtbeachtung also keinen weitern Uebelstand nach sich zog, als etwa den, daß man die Fläche und ihre Grenze als einfach ansah, während die eine wie die andere nach dem Gesetze unendlich viele Male sich selbst bedeckt. Nach der vervollständigten Ansicht wird also z. B. die Function des Kreises für rechtwinklige Coordinaten eine Begrenzungslinie desselben gegeben, die unendlich fortläuft und sich dabei immer wieder selbst bedeckt, und dieses stimmt überein mit dem Ergebnisse der polaren Erzeugungsweise der Kreislinie sowohl als mit der ursprünglichen Bildungsart derselben (§. 62, I, 5), wonach der Kreis (so wie alle krumme Linien) schlechthin ohne Ende ist.

10. Es wurde bisher bei der Untersuchung des Laufes der Krummen die Gl. (1) zu Grunde gelegt und Gl. (2) nur beiläufig zu Rathe gezogen. Diese letztere, mit Gl. (1) einerlei, nur für den anderen Bestandtheil gelöst, muß nothwendig von demselben Anfangspunkte und derselben Anfangsrichtung aus dieselbe Linie geben. Da sie aber eine vierarmige zu geben scheint, so unterwerfen wir sie noch einen Augenblick der Betrachtung, um ihre richtige Deutung zu gewinnen. Nehmen wir zuerst diese Gleichung,

$$(2) \quad w = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} - s^2)},$$

unter der Bedingung, daß s positiv sei, so erhalten wir, wie vorher, den Zug adf. Es bekommt nämlich, in diesem Fall, für die nur möglichen Werthe von s, 0 bis $\frac{1}{2}$, w zwei Reihen von Werthen, nämlich die Werthe 0 bis $\frac{1}{2}$ für das negative Zeichen der Gleichung, und 1 bis $\frac{1}{2}$ für das positive Zeichen. Gl. (1) aber hat ausgewiesen, daß derjenige Punkt $s = 0$, welcher $w = 1$ entspricht, nicht der Anfangspunkt, sondern der Punkt f ist; daher die Werthe von 1 bis $\frac{1}{2}$ für w zu denjenigen Werthen von s, 0 bis $\frac{1}{2}$, gehören, welche von f nach d laufen. Diese Werthe für w, 1 bis $\frac{1}{2}$, folgen also in der umgekehrten Ordnung, $\frac{1}{2}$ bis 1, für die Werthe von s, $\frac{1}{2}$ bis 0, welche sich von d nach f wiederholen, wie dieses von jeder Reihe endlicher Werthe beliebig geschehen kann. Die zweite Reihe der Werthe für w, 1 bis $\frac{1}{2}$, wird also nicht vom Anfangspunkte aus, sondern vom Punkte f aus, oder da dieses nicht real geschehen kann, in umgekehrter Folge vom Punkte d aus construirt. — Für den Ast, der durch die Bedingung, daß s negativ sei, entsteht, gilt das-

selbe; auch er ist ein einfacher, für welchen $s = 0$ sowohl im Punkte h als im Punkte a ist.

11. Der Lauf im Allgemeinen und insbesondere die Unendlichkeit der untersuchten Linie bestätigt sich auf überraschende Weise durch die Verlegung ihres Anfangspunktes nach d, der nächsten Spitze im positiven Arme, und die Veränderung ihrer Anfangsrichtung in die durch dt bezeichnete. Heißen von den neuen Standpunkten aus die Bestandtheile w′, s′, so ist erstlich

$$w' = w - \tfrac{1}{2}$$

$$(3) \qquad w' + \tfrac{1}{2} = w.$$

Verlangte man ferner den neuen Anfangspunkt mit derjenigen Richtung, die die Curve in d hat, also mit dq, so hätte man ebenso von dem alten Längenbestandtheil $\frac{1}{2}$ abzuziehen, um den neuen (der s″ heiße) zu gewinnen, also

$$s - \tfrac{1}{2} = s''.$$

Aber die positive Richtung dieses Anfangspunktes sollte (der Bequemlichkeit wegen) nach t zu gehen, also gerade entgegengesetzt, so daß

$$s'' = -s',$$

daher

$$s - \tfrac{1}{2} = -s'$$

$$(4) \qquad s = -s' + \tfrac{1}{2}.$$

Durch Einschiebung von (3) und (4) in (1) und (2) erhält man

$$(5)\quad s' = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - w'^2},$$

$$(6)\quad w' = \pm \sqrt{s' - s'^2}.$$

Anmerk. Diese sind die Wechselgleichungen von (2) und (1); daher ist die Wechselkrumme der Linie sie selbst.

Es wird hinreichend sein nach Anleitung der Gleichung (6) den Lauf der Linie zu verfolgen. Wir befinden uns also im Anfangspunkte d, der Anfangsrichtung dt, und können die gewünschte Auskunft aus 1 bis 6 erhalten, nur daß was dort s betrifft, hier für w', was dort w betrifft, hier für s' gilt.

a) Im Anfangspunkte (d) hat die Curve die Anfangsrichtung (dt).

b) Negative Werthe für s' sind unmöglich, die positiven laufen von 0 bis 1 und nicht weiter hinauf. Für diese Reihe hat w' zwei Reihen identischer Werthe, eine positive und eine negative. Die Curve hat also vom Anfangspunkte aus zwei identische positive Aeste, jeder = 1 an Länge, von denen sich der eine positiv (df ꝛc) der andere negativ (da ꝛc.) dreht.

c) Der Anfangspunkt ist daher eine Spitze (§. 36, 3).

d) Für die Werthe von s', 0 bis $\frac{1}{2}$, steigen die Werthe für w' von 0 bis $\frac{1}{2}$ und nehmen für die weiteren Werthe von s' bis zu 0 wieder ab. Ist daher df = $\frac{1}{2}$, so ist f ein Wendungspunkt und fm das zweite Stück des positiv sich drehenden Armes. Ebenso ist a ein Wendungspunkt im negativen Arme und das zweite Stück desselben ag.

Die zunächst, ohne Benutzung zurückgehender Werthe durch die Gleichung ausgedrückte Linie (ihre Periode) ist hier also mfdag, während unter derselben Bedingung früher für dieselbe Linie der Zug fdagh hervorging. Rückt man also den Anfangspunkt ein Stück = $\frac{1}{2}$ im positiven oder negativen Arme fort, und wiederholt diese Operation unendlich oft, so erhält man eine unendliche Linie für die Gleichung, da doch die Curve für alle beliebige Anfangspunkte dieselbe bleiben muß. Eine abermalige Bewährung der Nothwendigkeit, unendlich oft zurückgehende Reihen von Werthen anzunehmen, wenn man scheinbar endliche Linien ganz und nicht bloß eine einzelne Periode derselben erhalten will.

Bemerkung. Die absolute Größe der Drehungseinheit kann, wie in Fig. 24, 2R, oder wie

in Fig. 25, 4 R, oder wie in Fig. 26, 8 R oder sonst einen Theil oder ein Vielfaches der Viertelsumdrehung betragen. Es versteht sich von selbst, daß, wie auch diese Annahme gemacht werde, der Lauf der Linie im Allgemeinen, so wie auch die folgenden absoluten Eigenschaften unverändert dieselben bleiben. Das unter 1 bis 11 Gesagte gilt also gleichmäßig von den beiden letztgenannten Figuren. Diese stellen nur eine einzige Periode der Linie und zwar die der Gl. (6) $w = \pm\sqrt{s - s^2}$, also die dem Zuge mfdag Fig. 24 entsprechende dar. Diese Gleichung soll auch bei der folgenden Ableitung einiger andern absoluten Eigenschaften der Linie zu Grunde gelegt werden. Damit nicht die Auffassung der begrifflichen Allgemeinheit der Eigenschaften durch den steten Hinblick auf eine und dieselbe Anschauung erschwert werde, ist es gerathen, auch die beiden andern Veranschaulichungen des Begriffes (Fig. 25 und 26) mit in's Auge zu fassen. Die letzte Form der Curve (Fig. 26) ist unter der Voraussetzung, daß die absolute Größe der Drehungseinheit 8 R betrage, unveränderlich, wie weiter unten erhellt. Sie hat Aehnlichkeit mit einer Lyra, in der unten ein Herz ruht. Wegen des symbolisch Bedeutenden dieser Gestalt lege ich

ihr den Namen **Lyracordis** bei, und obwohl alle Formen der Curve sich mehr oder weniger dieser Form annähern, so will ich doch dadurch der Benennung der allgemeinen Curve nach allen ihren Gestalten mit einem etwaigen anderen Namen nicht vorgreifen.

II. Krümmungsstärke aller Punkte.

Die Gleichung unserer Curve von einer Spitze aus, mit der Richtung der letzteren nach innen, ist nach obiger Ableitung

$$(6)\quad w = \pm\sqrt{s - s^2}.$$

Um zu differentiiren, setze man $s - s^2 = v$, woraus $ds - 2sds = dv$, so ist

$$w = v^{\frac{1}{2}}$$

$$dw = \frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

Den Werth für v und dv eingeschoben, so erhält man

$$dw = \frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}}\,ds, \text{ woraus}$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}} = k.$$

Zahlenbeispiele. Wird in der Formel gesetzt $s = \frac{1}{5} = \frac{34}{170}$, so hat man $k = \frac{3}{4}$,

$s = \frac{1}{10} = \frac{17}{170}$, so hat man $k = \frac{4}{3}$,

$s = \frac{1}{17} = \frac{10}{170}$ „ „ $k = \frac{15}{8}$.

Da die Länge von der Spitze bis zum Wendungspunkte $\frac{1}{2}$ beträgt, so entsteht, wenn die Bogen von dem letzteren aus (also statt von d, von a oder von f aus) gerechnet werden, und diese Bogen durch s′ bezeichnet, für

$$s' = \frac{51}{170}, \quad k = \frac{3}{4} = \frac{18}{24},$$
$$s' = \frac{68}{170}, \quad k = \frac{4}{3} = \frac{32}{24},$$
$$s' = \frac{75}{170}, \quad k = \frac{15}{8} = \frac{45}{24}.$$

Anmerk. Hier tritt zugleich anschaulich hervor, wie vom Wendungspunkte aus die Krümmung mit stets fortdauernder Beschleunigung zunimmt.

III. Die Punkte der kleinsten und größten Krümmung.

1. Die absolut kleinste Krümmung würde sein $k = 0$; daher die Bedingung für den etwa vorhandenen Punkt derselben, daß im Werthe $\frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}}$ der Zähler verschwinde. Also $1-2s = 0$ woraus $\frac{1}{2} = s$. Der gesuchte Punkt ist also der Wendungspunkt. Da die Periode in zwei Aesten vom Anfangspunkte aus positiv fortschreitet, so liegen dieser Punkte zwei in ihr, und unendlich viele in der ganzen Curve.

2. Kann k durch die Voraussetzung irgend eines Werthes für s unendlich groß werden, so giebt es ein absolutes Maximum für k. Soll aber dieses Statt finden, so muß sein Werth die Form $\frac{x}{0}$ annehmen, also in $\frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}}$ der Nenner verschwinden, wodurch jedoch das Verschwinden des Zählers nicht herbei geführt werden darf. Daher die versuchsweise Forderung

$$2\sqrt{(s-s^2)} = 0$$

$$s - s^2 = 0$$

$$(1-s)\,s = 0.$$

Dieser Bedingung kann unter zwei Voraussetzungen genügt werden:

$$(1) \quad s = 0,$$

$$(2) \quad 1 - s = 0, \text{ d. h. } 1 = s.$$

Für beide Werthe von s verschwindet der Zähler nicht. Es sind daher in jeder Periode drei Punkte der größten und zwar unendlich großer Krümmung vorhanden, der Anfangspunkt (d) und die beiden Punkte $s = +1$ (in der Fig. m und g) in beiden positiv fortschreitenden Armen (dfm und dag). Die beiden letzteren Punkte gehören zugleich den beiden angrenzenden Perioden an. Alle drei Punkte sind, wie schon gezeigt worden, Spitzen,

die sich in allen Perioden in gleicher Anzahl und Lage wiederholen.

IV. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Gestalt und der Größe der Curve.

Aus II findet sich

$$k : k' = \frac{1-2s}{\sqrt{(s-s^2)}} : \frac{1-2s'}{\sqrt{(s'-s'^2)}}$$

als Krümmungsverhältniß.

Dieses entscheidet wieder die Frage über die Gestalt. Da Drehung und Fortschritt sich hier nur in endlichen Größen bewegen, so muß die absolute Größe der Drehungseinheit beachtet werden. Denn von ihr hängt die absolute Größe der Drehung für einen gewissen Curvenpunkt ab.

Zwei verschiedene Exemplare unserer Curve erhalten die Gleichungen

$$w = \pm\sqrt{(s - s^2)},$$

$$W = \pm\sqrt{(S - S^2)}.$$

Daher ist die Drehung für

den Punkt s	$w = \pm\sqrt{(s - s^2)}$,
= = s'	$w' = \pm\sqrt{(s' - s'^2)}$,
= = S	$W = \pm\sqrt{(S - S^2)}$,
= = S'	$W' = \pm\sqrt{(S' - S'^2)}$.

ihr den Namen **Lyracordis** bei, und obwohl alle Formen der Curve sich mehr oder weniger dieser Form annähern, so will ich doch dadurch der Benennung der allgemeinen Curve nach allen ihren Gestalten mit einem etwaigen anderen Namen nicht vorgreifen.

II. Krümmungsstärke aller Punkte.

Die Gleichung unserer Curve von einer Spitze aus, mit der Richtung der letzteren nach innen, ist nach obiger Ableitung

$$(6) \quad w = \pm\sqrt{s - s^2}.$$

Um zu differentiiren, setze man $s - s^2 = v$, woraus $ds - 2sds = dv$, so ist

$$w = v^{\frac{1}{2}}$$

$$dw = \frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

Den Werth für v und dv eingeschoben, so erhält man

$$dw = \frac{1 - 2s}{2\sqrt{(s - s^2)}}\, ds, \text{ woraus}$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1 - 2s}{2\sqrt{(s - s^2)}} = k.$$

Zahlenbeispiele. Wird in der Formel gesetzt $s = \frac{1}{5} = \frac{34}{170}$, so hat man $k = \frac{3}{4}$,

$s = \frac{1}{10} = \frac{17}{170}$, so hat man $k = \frac{4}{3}$,

$s = \frac{1}{17} = \frac{10}{170}$ „ „ $k = \frac{15}{8}$.

Da die Länge von der Spitze bis zum Wendungspunkte $\frac{1}{2}$ beträgt, so entsteht, wenn die Bogen von dem letzteren aus (also statt von d, von a oder von f aus) gerechnet werden, und diese Bogen durch s' bezeichnet, für

$s' = \frac{51}{170}$, $k = \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$,

$s' = \frac{68}{170}$, $k = \frac{4}{3} = \frac{32}{24}$,

$s' = \frac{75}{170}$, $k = \frac{15}{8} = \frac{45}{24}$.

Anmerk. Hier tritt zugleich anschaulich hervor, wie vom Wendungspunkte aus die Krümmung mit stets fortdauernder Beschleunigung zunimmt.

III. Die Punkte der kleinsten und größten Krümmung.

1. Die absolut kleinste Krümmung würde sein $k = 0$; daher die Bedingung für den etwa vorhandenen Punkt derselben, daß im Werthe $\frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}}$ der Zähler verschwinde. Also $1-2s = 0$ woraus $\frac{1}{2} = s$. Der gesuchte Punkt ist also der Wendungspunkt. Da die Periode in zwei Aesten vom Anfangspunkte aus positiv fortschreitet, so liegen dieser Punkte zwei in ihr, und unendlich viele in der ganzen Curve.

2. Kann k durch die Voraussetzung irgend eines Werthes für s unendlich groß werden, so giebt es ein absolutes Maximum für k. Soll aber dieses Statt finden, so muß sein Werth die Form $\frac{x}{0}$ annehmen, also in $\frac{1-2s}{2\sqrt{(s-s^2)}}$ der Nenner verschwinden, wodurch jedoch das Verschwinden des Zählers nicht herbei geführt werden darf. Daher die versuchsweise Forderung

$$\frac{\frac{2\sqrt{(s-s^2)}=0}{s-s^2=0}}{(1-s)s=0.}$$

Dieser Bedingung kann unter zwei Voraussetzungen genügt werden:

$$(1) \quad s=0,$$
$$(2) \quad 1-s=0, \text{ d. h. } 1=s.$$

Für beide Werthe von s verschwindet der Zähler nicht. Es sind daher in jeder Periode drei Punkte der größten und zwar unendlich großer Krümmung vorhanden, der Anfangspunkt (d) und die beiden Punkte $s=+1$ (in der Fig. m und g) in beiden positiv fortschreitenden Armen (dfm und dag). Die beiden letzteren Punkte gehören zugleich den beiden angrenzenden Perioden an. Alle drei Punkte sind, wie schon gezeigt worden, Spitzen,

die sich in allen Perioden in gleicher Anzahl und Lage wiederholen.

IV. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Gestalt und der Größe der Curve.

Aus II findet sich

$$k : k' = \frac{1-2s}{\sqrt{(s-s^2)}} : \frac{1-2s'}{\sqrt{(s'-s'^2)}}$$

als Krümmungsverhältniß.

Dieses entscheidet wieder die Frage über die Gestalt. Da Drehung und Fortschritt sich hier nur in endlichen Größen bewegen, so muß die absolute Größe der Drehungseinheit beachtet werden. Denn von ihr hängt die absolute Größe der Drehung für einen gewissen Curvenpunkt ab.

Zwei verschiedene Exemplare unserer Curve erhalten die Gleichungen

$$w = \pm \sqrt{(s-s^2)},$$
$$W = \pm \sqrt{(S-S^2)}.$$

Daher ist die Drehung für

den Punkt s $\quad w = \pm \sqrt{(s-s^2)},$
= = s' $\quad w' = \pm \sqrt{(s'-s'^2)},$
= = S $\quad W = \pm \sqrt{(S-S^2)},$
= = S' $\quad W' = \pm \sqrt{(S'-S'^2)}.$

Wenn man die absolute Größe der Drehungseinheit für die zweite Krümmung wieder f mal so groß angenommen wird, als für die erste, so ist, damit die Punkte w und W, so auch w′ und W′ ähnlich liegende seien, nicht w = W, w′ = W′, sondern fw = W, fw′ = W′. Daher die Bedingungen

$$(1)\quad \frac{\pm f\sqrt{(s - s^2)} = \pm\sqrt{(S - S^2)}}{s = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(4S^2 - 4S + f^2)}}{2f},}$$

$$(2)\quad \frac{\pm f\sqrt{(s' - s'^2)} = \pm\sqrt{(S' - S'^2)}}{s' = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(4S'^2 - 4S' + f^2)}}{2f}.}$$

Nun ist nach Obigem die Krümmungsproportion:

$$\frac{1-2s}{\sqrt{(s-s^2)}} : \frac{1-2s'}{\sqrt{(s'-s'^2)}} = \frac{1-2S}{\sqrt{(S-S^2)}} : \frac{1-2S'}{\sqrt{(S'-S'^2)}}.$$

Schiebt man in den beiden ersten Ausdrücken die für s und s′ berechneten Werthe ein, so erhält man als Bedingung der Aehnlichkeit:

$$\frac{\frac{\mp\sqrt{(4S^2-4S+f^2)}}{\pm\sqrt{(S-S^2)}} : \frac{\mp\sqrt{(S'^2-4S'+f^2)}}{\pm\sqrt{(S'-S'^2)}} = \frac{1-2S}{\sqrt{(S-S^2)}} : \frac{1-2S'}{\sqrt{(S'-S'^2)}}}{4S^2-4S+f^2 : 4S'^2-4S'+f^2 = 1-4S+4S^2 : 1-4S'+4S'^2.}$$

Folglich müßte sein

$$\frac{(4S^2-4S+f^2)(1-4S'+4S'^2) = (4S'^2-4S'+f^2)(1-4S+4S^2),}{(S'^2-S^2+S-S')(f^2-1) = 0.}$$

Die in Frage stehende Aehnlichkeit findet also

im Allgemeinen nicht Statt; die Anschauungen des allgemeinen Begriffes können verschiedene Gestalt haben. Sollte sich aber zeigen, daß die so eben erhaltene Bedingung wenigstens unter irgend einer speciellen brauchbaren Voraussetzung wahr würde, so ginge daraus die Möglichkeit der Aehnlichkeit und die Bedingung ihrer Wirklichkeit hervor.

$$(S^n - S^o + S - S')(f^2 - 1)$$

kann aber unter zwei Bedingungen $= 0$ werden.

1. Der erste Factor sei $= 0$, woraus folgt $S = S'$. Soll dies sein, so fallen beide Punkte in einen zusammen, sowohl in dem einen als in dem andern Exemplare der Curve, denn aus $S = S'$ folgt auch $s = s'$. (Siehe die obigen beiden durch S und S' ausgedrückten Werthe von s und s'.) Läßt man aber wirklich dieses Zusammenfallen geschehen, so kann von einem Gleichverhältniß der Krümmungsstärken je zweier verschiedenen Punkte in der einen und in der andern Curve mehr die Rede sein und die Möglichkeit der Untersuchung der Gestalt durch ihren Begriff fällt hinweg, das ganze Verfahren ist von vorn herein unter dieser Voraussetzung eine hohle Form gewesen: denn freilich, da in

einem und demselben Punkte die Krümmungsstärke eines Curven-Exemplares sich selbst gleich ist, so muß dieses Verhältniß für jedes Exemplar und jede Curve überhaupt $= 1$ sein, wodurch nichts über die Gestalt ausgesagt ist. — Anders ausgedrückt: der erste Factor kann nicht 0 werden, weil die hieraus entstehende Folge $S = S'$ wider die Voraussetzung ist, welche eine Verschiedenheit dieser Größen fordert.

2. Der zweite Factor $f^2 - 1$ sei $= 0$, woraus folgt $f = \pm 1$. Diese Bedingung ist brauchbar und spricht den weitern Satz aus: Sind die absoluten Größen der Drehungseinheit gleich (so daß $w = W$, $w' = W'$ gesetzt werden kann), so sind alle Curven der gegebenen Gleichung ähnlich, man setze die absolute Größe der Längeneinheit so groß oder so klein, als man will. Auch geht für die Metamorphose der Gestalt hervor, daß man sich von der Erfüllung der Bedingung, also von der Gestaltgleichheit desto weiter entfernt, je mehr man f über oder unter 1 setzt, d. h. je verschiedener die absoluten Größen der Drehungseinheit gewählt werden.

Die vollständige Metamorphose der Curvengestalt ist nun leicht zu verfolgen. Nach Aussage der

Untersuchung hat die Curve für alle möglichen verschiedenen Werthe der absoluten Größe der Drehungseinheit eine andere Gestalt. Diese absoluten Größen können von 0 an bis ins Unendliche stetig aufsteigen. Läßt man sie, bei einer und derselben absoluten Größe der Längeneinheit, in dieser stetigen Folge in die Gleichung eintreten, so wird die Gestalt der Linie eine stetige Metamorphose erleiden. Da die Curve aus lauter identischen Perioden, jede Periode aber wieder aus zwei identischen Hälften (z. B. dfm und dag) besteht, so reicht es hin, der Metamorphose einer solchen Hälfte nachzugehen. Die absolute Größe der Drehungseinheit = 0 giebt wegen Mangels aller Drehung für eine solche Hälfte eine endliche Gerade. So wie kleine reelle nach und nach aufsteigende Werthe (z. B 1°, 2°, 5°) für jene absolute Größe eintreten, fängt die Linie an sich von ihrer Mitte aus auf gleiche Weise aber nach verschiedenen Seiten, zuerst kaum merkbar, zu krümmen, und zwar im Ganzen jedesmal um die Hälfte der absoluten Drehungsgröße nach jeder Seite. Das Krümmungsgesetz schreibt vor, auf welche Art dies geschieht, und hat bereits bestimmt, daß diese Krümmung nahe an der Mitte der Linie unendlich klein

bleibe, sich aber nach beiden Enden hin immer mehr vergrößere, und am Endpunkte selbst unendlich groß werde. Je mehr nun die absolute Drehungsgröße wächst, desto mehr kolbenartig wird die Linie gegen die Endpunkte hin, und fängt nach 8 R (dem Momente, den die Lyracordis, Fig. 26, bezeichnet) an, sich in sich selbst zu winden. Dieses geschieht immer mehr, je mehr die absolute Drehungsgröße wächst, so daß man eine nach zwei entgegengesetzten Seiten spiralirende Linie mit immer mehr und beliebig anwachsender Zahl ihrer Windungen erhält. Diese Linie bildet das Element der Periode, man denke es doppelt auf gehörige Weise aneinander gelegt und solcher Perioden eine unendliche Zahl, und erhält eine bestimmte Vorstellung von dem Flusse der Gestalten der ganzen Curve nebst den dazu gehörigen begrifflichen Bedingungen.

Fixirt man nun diese Gestalt der Curve durch Fixirung der absoluten Drehungsgröße in irgend einem Momente ihrer Verwandlung, so läuft sie durch die Annahme einerseits stetig bis zu 0 abnehmender, andererseits bis in's Unendliche aufsteigender absoluten Größenwerthe für die Längeneinheit durch alle Größen, immer dieselbe Gestalt bewahrend.

Diese Metamorphose der Größe geht also gewissermaßen von jedem Momente der Metamorphose der Gestalt aus.

Fünftes Kapitel.

Die Linie $w = a . \frac{1}{s}$.

§. 71.

Anmerk. 1. Diese Linie gehört der allgemeinen Gleichung des 2ten Grades, und insbesondere der Form

$$Bws + Dw + Es + F = 0$$

an. Setzt man statt der Bestandtheile w und s rechtwinklige Coordinaten, so stellt die zu untersuchende Gleichung ($x = \frac{a}{y}$) eine Form der gemeinen Hyperbel dar.

Anmerk. 2. Die Wechselkrumme der Linie ist sie selbst, denn aus

$$(1)\ w = a . \frac{1}{s} \text{ folgt}$$
$$(2)\ s = a . \frac{1}{w}$$

I. Lauf im Allgemeinen.

1. Für jeden Werth von s entsteht nur ein Werth für w und umgekehrt: die Linie ist also einfach oder besteht aus einem einzigen Zuge, der jedoch, wie gleich hervorgehen wird, an einem seiner Punkte nur im Unendlichen stetig gedacht werden kann.

2. Zu jedem möglichen positiven, so wie zu jedem möglichen negativen Werthe von s gehört auch ein möglicher Werth von w: der Zug der Linie hat also 2 Arme, einen positiven und einen negativen, und beide erstrecken sich in's Unendliche.

3. Da für die negativen Werthe für s dieselben negativen Werthe für w entstehen, welche man positiv erhält für die gleichen positiven Werthe von s, so sind der positive und der negative Ast identisch. Es darf daher nur der Lauf des einen von ihnen untersucht und darauf die gegenseitige Lage Beider bestimmt werden.

4. Im Anfangspunkte ist die Drehung bereits unendlich groß, da für $s = 0$, $w = \infty$, d. h. die dem Anfangspunkte in unendlichen Windungen nachstrebende Linie erreicht diesen nie. Nach der entgegengesetzten Erstreckung des Zuges, wo

seine Länge unendlich groß geworden ist, liegt die Anfangsrichtung; denn $w = 0$ giebt $s = \infty$. Der Anfangsrichtung nähert sich daher die Richtung der Curve nach der Seite des unendlich großen Fortschrittes unendlich, gelangt also niemals völlig in dieselbe. Die Drehungen haben ihren Ursprung, wo der Bogen bereits unendlich groß, der Bogen seinen Ursprung, wo die Drehung schon unendlich groß ist. Die Gleichung fordert also, daß, während man die Längen vom Anfangspunkte aus rechnet, die Drehungen von der entgegengesetzten Seite her gezählt werden. Um sich die allgemeine Vorstellung eines Astes der Curve zu bilden, kann man also weder vom Anfangspunkte noch von der Anfangsrichtung ausgehen, man muß sich in einen Binnenpunkt versetzen. Zu diesem wird am bequemsten der Punkt $s = 1$ gewählt. Sei dieser Punkt g (Fig. 27) und die Anfangsrichtung gk. Für $s = 1$, welche Länge also im Punkte g vom Anfangspunkte an schon zurückgelegt ist, wird $w = a$. Setzt man diesen Winkel z. B. $= 1\,R$, so hat die Curve in g die Richtung gm. Nimmt man s wieder kleiner und kleiner, d. h. nähert man sich, rück-

wärts gehend, immer mehr dem Anfangspunkte, so wird w größer und größer, zuletzt unendlich. Es fragt sich nur noch, nach welcher Richtung dieser Fortschritt von g aus sich erstrecke. Der absolut positive Fortschritt von g aus ginge nach m zu. Aber obgleich für die positiven Drehungen auch die Fortschritte positiv werden, so bewirkt doch der Umstand, daß Drehungen und Fortschritte von entgegengesetzten Seiten an gerechnet werden, eine Umkehrung der Lage; während die Drehung von gk nach gm positiv ist, erfolgt daher der Fortschritt von g aus positiv nach p hin. Da nun in g der Fortschritt schon 1 betragen soll und wir wieder rückwärts schreiten wollen, so müssen von g aus negativ, also in der Richtung gm, die Längen genommen werden. Man erhält also einen Zug wie gna, der sich bei einer in's Unendliche fortgehenden Umdrehung der Länge 1 und damit dem Anfangspunkte (a) unendlich nähert. Um den Ast auch nach der andern Seite von g, nach d hin, zu verfolgen, so zeigt die Gleichung für die unendliche Zunahme des φ die Abnahme der Drehung in's Unendliche. Sie nimmt desto mehr ab, je größer die Länge des

Zuges, von a aus genommen, wird, da Länge und Drehung im umgekehrten Verhältniße stehen. Es ist schon gezeigt, daß von g aus die positive Fortschritte nach p gehen; sollen nun von der Anfangsrichtung aus die Drehungen für den ganzen Ast immer nach derselben Seite hin erfolgen, wie dieses die Gleichung verlangt, so müssen sie von einem Binnenpunkte, wie g aus bekanntlich nach entgegengesetzten Seiten geschehen, also statt in der vorherigen Richtung von gk nach gm, in der entgegengesetzten, also von gp nach gh hin. Der Größe nach aber werden die Drehungen von gp aus diejenigen sein, welche die aus der Gleichung hervorgehenden zu der Drehungsgröße a, hier zu einem Rechten, ergänzen. Man hat also einen Zug wie gfd, der sich über d hinaus in's Unendliche verlängt, während seine Drehung sich unendlich der endlichen Größe a (hier 1 R) und damit dem Parallelismus mit der Anfangsrichtung nähert. — Die beiden von g oder jedem andern Binnenpunkte nach entgegengesetzten Seiten ausgehenden Erstreckungen (gna und gfd) eines jeden von den beiden Aesten der Linie bilden also einen Gegensatz in Beziehung auf Dre-

hung und Fortschritt. Während der Theil nach d hin unendlich lang ist und sich dabei die Drehung unendlich einer endlichen Größe nähert, ist der Theil nach n hin von unendlich großer Drehung, wobei seine Länge unendlich einem endlichen Werthe sich nähert.

Anmerk. Linien, wie diese, die bisher schlechtweg unter die Spiralen gezählt worden, sollten mit dem Namen Halbspiralen belegt werden. Unter diesem Namen sind jedoch auch diejenigen Linien zu begreifen, die nach beiden Erstreckungen unendlich große Länge haben, sowohl nach der Seite der unendlich großen als nach der einer endlichen Größe unendlich sich annähernden Drehung. Die Halbspiralen, zu denen z. B. die hyperbolische Spirale, der Lituus rc. gehören, bilden eine eigene und wichtige Klasse krummer Linien und unterscheiden sich dadurch von den Spiralen, daß die letzteren sich nach beiden Erstreckungen des einfachen Zuges unendlich winden, jene aber nur nach einer, nach der andern hingegen sich unendlich strecken. Diese Verschiedenheit ist eine wesentliche. Die Arme der Parabel sind beide Strecker (d. h. bei unendlicher Länge nähert sich ihre Drehung unendlich einer endlichen Größe), die der eigentlichen Spiralen (z. B.

der archimedischen, der logarithmischen ꝛc.) beide Winder (d. h. von unendlich großer Drehung, die Länge mag dabei endlich oder unendlich groß sein). Die Halbspiralen liegen also zwischen den Spiralen und zwei- oder mehrseitig gestreckten Linien (Parabeln) in der Mitte, und könnten, wenn man sie nur nach der Eigenthümlichkeit ihrer einen Erstreckung benennen will, mit vollkommen so gutem Rechte Parabeln als Spiralen heißen.

5. Die Vorstellung eines ganzen Astes vom Anfangspunkte a aus und der Lage beider Aeste gegen einander ist nun leicht möglich. Für den positiven Fortschritt ist auch die Drehung positiv. Da diese aber von der entgegengesetzten Seite her gerechnet wird, so muß man sie entgegengesetzt, also hier negativ, nehmen, wenn man den Lauf der Curve auch in Rücksicht der Drehungen von a aus verfolgen will. Der in Rede stehende positive Ast (angfd) der Linie habe von a aus schon unendliche Umdrehungen gemacht und zwar so, daß ihm nur noch eine einzige zu machen übrig bleibt, und befindet sich daher für diese Bestimmung genau im Punkte, wo der Buchstabe a stehet. (Dieser bezeichnet eigentlich den Anfangspunkt, in der Mitte; aber

die Kleinheit der Zeichnung ließ die Hinstellung eines besondern Zeichens für den letzteren nicht zu). Der zweite, negative und identische Ast habe ebenfalls nur noch eine Umdrehung zu machen; in diesem Punkte befindet er sich nothwendig, wie dies überhaupt für jeden Punkt mit gleich großer absoluter Drehung bei identischen Linien der Fall ist, auf derselben Seite der Anfangsrichtung (cb). (Die Fig. 28 und 29, Taf. II, erläutern dieses durch die Anschauung. In der erstern dreht sich die Linie negativ bei positivem Fortschritte, in der zweiten positiv bei negativem Fortschritte, ebenso wie in unserm Falle, nur daß diese Figuren die Unendlichkeit der Windungen ignoriren, also die Drehung vom Anfangspunkte aus begonnen ist. Der Punkt d z. B., an dem die Krumme in beiden Figuren gleiche absolute Drehung hat, liegt auf derselben Seite der Anfangsrichtung; von ihm aus läuft die Linie Fig. 28 aufwärts, die Linie Fig. 29 niederwärts.) Seine Drehung aber so wie sein Fortschritt sind dem des identischen positiven Astes in dem ähnlich liegenden Punkte gerade entgegengesetzt, vermöge der Gleichung. Während sich also der positive Ast für das erste

Viertel seiner letzten Umdrehung links abwärts wendet, muß der negative Ast (aohf, Fig. 27) identisch rechts abwärts laufen, woraus die Lage der beiden Aeste gegen einander folgt, wie die Figur sie darstellt. — Im Anfangspunkte ist die Linie also nur für den Begriff, niemals für die Anschauung stetig, da diese Ununterbrochenheit nur bei Unendlichgroßheit der Drehungen eintritt, also nur dann von beiden Aesten der Anfangspunkt erreicht wird.

II. Uebergangspunkte.

Der Anfangspunkt ist kein solcher (§. 36, 1). Eben so wenig giebt es unter den übrigen Punkten einen übergehenden, da Drehung und Fortschritt vom Anfangspunkte aus in beiden Aesten stets unentgegengesetzt fortlaufen. Alle Punkte der Krummen sind daher gemeine Curvenpunkte.

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Aus (1) $w = a \cdot \frac{1}{s}$ erhält man durch Differentiation

$$dw = -as^{-2}ds,$$

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{a}{s^2} = k.$$

Oder wünscht man k durch w ausgedrückt, so geht durch Einschiebung hervor $-\frac{w^2}{a}=k$.

IV. Die Punkte der größten und kleinsten Krümmung.

1. Setzt man in der ersten Krümmungsgleichung $s=0$, so wird k unendlich groß. Der Punkt der größten Krümmung ist also der Anfangspunkt.

2. Setzt man in der zweiten Krümmungsgleichung $w=0$, so wird $k=0$. Der Punkt der kleinsten Krümmung ist, wo die Linie die Anfangsrichtung hat, d. h. im Unendlichen des Fortschrittes.

Nach der einen Erstreckung strebt also die Linie dem Punkte der größten, nach der andern dem Punkte der kleinsten Krümmung unendlich nach, ohne einen von beiden jemals zu erreichen. Nach der einen Erstreckung nimmt die Krümmung endlos ab, nach der andern endlos zu. Dieses gilt gleichmäßig vom positiven wie vom negativen Aste, denn $-s$ statt s in die erste Krümmungsgleichung gesetzt, gewährt dieselben Resultate. In beiden Fällen ist übrigens die Krümmung negativ.

V. Krümmungsverhältniß. Gestalt.

(1) $k : k' = -\frac{a}{s^2} : -\frac{a}{s'^2} = s'^2 : s^2.$

Die Krümmungsstärken verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Bogenlängen.

(2) $k : k' = -\frac{w^2}{a} : -\frac{w'^2}{a} = w^2 : w'^2.$

Die Krümmungsstärken verhalten sich wie die Quadrate der Drehungen.

3) Alle Curven dieser Gleichung sind ähnlich, da das Krümmungsverhältniß unabhängig von den beständigen Größen ist. $w^2 : w'^2 = (fw)^2 : (fw')^2$ ist eine richtige Proportion.

Sechstes Kapitel.

Einige höhere Curven.

§. 72.

Der bisherige Inhalt dieses Abschnittes macht, hoffe ich, hinlänglich klar, wie man den Zusammenhang der wichtigsten absoluten Eigenschaften einer Curve unter sich und mit dem Begriffe erforscht. Ich wählte zu diesem Zwecke die Linien verschieden-

artig und so einfach als möglich. Sie repräsentiren der Reihe nach die Linien des ersten und zweiten Grades, und zwar entspricht die erste (der Kreis) der Gleichung der geraden Linie für rechtwinklige Coordinaten, die zweite und mit ihr die dritte der Gleichung der Parabel, die vierte dem einfachsten speciellen Falle der Gleichung für die Ellipse, nämlich der Kreisgleichung, die fünfte einem speciellen Falle der Gleichung für die Hyperbel. Mit ferneren Untersuchungen dieser Art einhaltend begnüge ich mich hier, zu weiterer Anregung noch ein paar leichte Gleichungen des dritten Grades, ein paar Exponential-Gleichungen und eine sehr einfache trigonometrisch transcendentale mit den nach Zahl und Maaß gebildeten Zeichnungen entsprechender Curvenexemplare und einigen kurzen Bemerkungen zu begleiten.

I. Gleichung: $ws^2 = a$; daraus

$$w = \frac{a}{s^2}, \qquad s = \pm \sqrt{\frac{a}{w}}.$$

Die Linie gehört zu einer Gattung mit der des vorigen Kapitels, da die Gleichung dieselbe Form hat. Sie verbreitet sich ebenfalls in zwei identischen Armen, deren jeder eine Halbspirale ist; Fig. 30 stellt nur einen solchen Arm, also nur die halbe

Linie dar. Die Anfangsrichtung ist gk; dem Parallelismus mit ihr nähert sich der gestreckte Zweig der Linie ohne Ende. Der Anfangspunkt liegt im Innern des gewundenen Zweiges, der diesem Punkte sich unendlich nähert. Im Punkte g ist $s = 1$ gesetzt, und $a = 1$ R.

II. Gleichung: $ws^2 + w = s^2$; daraus

$$w = \frac{s^2}{s^2+1}, \qquad s = \pm\sqrt{\frac{w}{1-w}}.$$

Die Linie hat zwei vom Anfangspunkte aus entgegengesetzt fortschreitende aber beide positiv sich wendende identische Arme, die bei unendlicher Länge einer endlichen Drehungsgröße ohne Ende sich nähern. Diese Größe ist die Drehungseinheit, auf deren absoluten Werth es also ankommt, und mit welchem die Gestalt der Curve sich ändert. In den Figuren 31, 32 und 33 ist dieser Werth $= 1$ R, 2 R, 4 R gesetzt. a ist der Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung.

III. Gleichung: $w \cdot 2^s = 2^s - 1$, daraus

$$w = \frac{2^s - 1}{2^s} = 1 - \frac{1}{2^s}.$$

Die Linie ist eine Halbspirale, die jedoch zu einer andern Art derselben, als die beiden schon betrachteten gehört, und sich von ihnen dadurch wesentlich unterscheidet, daß sie nur aus einem einzigen

Aste besteht, der auch nach der Seite der unendlich großen Drehung unendlich lang ist (nicht, wie die früheren, sich unendlich einer endlichen Größe nähert). Fig. 34 stellt die Linie vollständig dar, nur daß natürlich beide unendliche Erstreckungen der Linie abgebrochen sind. a ist der Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung; die Drehungseinheit wurde $= 1\,R$ genommen. Der Strecker nähert sich unendlich dem Parallelismus mit einer durch die absolute Größe der Drehungseinheit bestimmten Geraden, hier mit einem Lothe auf der Anfangsrichtung, und diese Annäherung geschieht verhältnißmäßig bei weitem schneller, als bei den Halbspiralen Fig. 27 und 30.

IV. Setzt man in der Gleichung $s = \frac{a(e^w - 1)}{e - 1}$ $a = 1$, $e = 2$, so entsteht

$$s = 2^w - 1.$$

Die Linie dieser Gleichung ist eine eigentliche Spirale, und zwar eine Spirale nach innen und außen, die sich, ohne einen Uebergangspunkt zu haben, nach der einen Erstreckung mit unendlich großer Drehung und Länge nach außen, nach der andern mit ebenfalls unendlich großer Drehung, aber das Ziel einer endlichen Länge unendlich verfolgend, nach innen windet. Anfangspunkt und Anfangsrichtung sind gleichgültig für die Linie.

Diese (übrigens benannte und hinlänglich bekannte) Spirale stellt eine geometrische Progression dar, und zwar in Fig. 35 mit dem Exponenten 2, wenn die ganzen Umdrehungen die Gliederzahl bilden, und die Längen der einzelnen ganzen Umdrehungen den Werth der Glieder. Die Rechnung für die Zeichnung ließ sich nach der Formel

$$w = \frac{\log. (1+s)}{\log. 2}$$

bequem vornehmen.

Fig. 36 stellt ebenfalls die Linie dar, aber unter der obigen Bedingung einer geometrischen Progression mit dem Exponenten 64 entsprechend, weshalb denn der Zug gewaltig ausholt, und nur ein kleines Stück von ihm, etwas mehr als $1\frac{1}{4}$ Umdrehungen, gebildet werden konnte.

V. Gleichung: $s = a\,tg.\,w.$

Die Fig. 37 abgebildete Linie, deren Anfangsrichtung ab ist, gehört zu den Parabeln; beide Arme sind Strecker und identisch. Sie schreiten entgegengesetzt mit entgegengesetzter Drehung ins Unendliche fort, der endlichen Drehungsgröße 1 R, und daher dem Parallelismus mit der Hauptaxe ac ohne Ende sich nähernd.

Sechster Abschnitt.

Ableitung von relativen Eigenschaften ebener Curven.

Erstes Kapitel.

Die Rectification ebener Curven aus der ursprünglichen Gleichung.

§. 73.

Eine relative Eigenschaft eines geometrischen Gebildes stellt nach §. 22, 2 die Abhängigkeit dar, in welcher entweder das Gebilde selbst nach irgend einer Beziehung (Ausdehnung, Lage, Gestalt rc.) oder doch einer seiner Theile, Bestandtheile, Grenzen rc. zu einem anderweitig gesetzten Gebilde oder dessen Theilen rc. steht. Soll also ausgemittelt werden, wie sich der Bogen einer Curve zu einer durch diesen Bogen geometrisch bestimmten Ge-

raden der Ausdehnung nach verhalte, so ist dieses die Untersuchung einer relativen Eigenschaft; denn die Curve selbst wird hier in Relation zu einer neuen geometrischen Bestimmung gesetzt, nämlich zu der Geraden, mit der sie verglichen werden soll.

§. 74.

Sei ac (Fig. 38, Taf. II) ein Bogen einer Krummen, deren Anfangspunkt a ist. Ihre Richtungslinie in a oder die Anfangsrichtung sei ab, in c sei die Richtung kc. Die Richtungsveränderung des Bogens ac wird also durch den Winkel bhc ausgedrückt. Errichtet man nun auf ab im Punkte a ein Loth ag, und fällt auf die letzte Linie ein Loth von c aus, so ist wegen des Parallelismus der Geraden ba und cf und der Gleichheit der Innenwechselwinkel an Parallelen, $\angle bhc = \angle kcf$. Also drückt kcf die Richtungsveränderung oder Drehungsgröße des Bogens ac aus, und während $ac = s$, ist $kcf = w$. Zugleich bilden af und cf, und, wenn man gd parallel cf zieht, ag und gd u. ein System rechtwinkliger Coordinaten für die Curve. an sei die Abscissenlinie, also cf die Ordinate y für die Abscisse $af = x$.

Die Aufgabe ist nun, die Länge eines Bogens (ac)

Sechster Abschnitt.

Ableitung von relativen Eigenschaften ebener Curven.

Erstes Kapitel.

Die Rectification ebener Curven aus der ursprünglichen Gleichung.

§. 73.

Eine relative Eigenschaft eines geometrischen Gebildes stellt nach §. 22, 2 die Abhängigkeit dar, in welcher entweder das Gebilde selbst nach irgend einer Beziehung (Ausdehnung, Lage, Gestalt ꝛc.) oder doch einer seiner Theile, Bestandtheile, Grenzen ꝛc. zu einem anderweitig gesetzten Gebilde oder dessen Theilen ꝛc. steht. Soll also ausgemittelt werden, wie sich der Bogen einer Curve zu einer durch diesen Bogen geometrisch bestimmten Ge-

raden der Ausdehnung nach verhalte, so ist dieses die Untersuchung einer relativen Eigenschaft; denn die Curve selbst wird hier in Relation zu einer neuen geometrischen Bestimmung gesetzt, nämlich zu der Geraden, mit der sie verglichen werden soll.

§. 74.

Sei ac (Fig. 38, Taf. II) ein Bogen einer Krummen, deren Anfangspunkt a ist. Ihre Richtungslinie in a oder die Anfangsrichtung sei ab, in c sei die Richtung kc. Die Richtungsveränderung des Bogens ac wird also durch den Winkel bhc ausgedrückt. Errichtet man nun auf ab im Punkte a ein Loth ag, und fällt auf die letzte Linie ein Loth von c aus, so ist wegen des Parallelismus der Geraden ba und cf und der Gleichheit der Innenwechselwinkel an Parallelen, $\angle bhc = \angle kcf$. Also drückt kcf die Richtungsveränderung oder Drehungsgröße des Bogens ac aus, und während $ac = s$, ist $kcf = w$. Zugleich bilden af und cf, und, wenn man gd parallel cf zieht, ag und gd &c. ein System rechtwinkliger Coordinaten für die Curve. an sei die Abscissenlinie, also cf die Ordinate y für die Abscisse $af = x$.

Die Aufgabe ist nun, die Länge eines Bogens (ac)

im Verhältniß zu der Richtungslinie (pa) oder dem Lothe (pc), d. h. zu der Ordinate oder Abscisse des Bogens, oder auch umgekehrt, auszudrücken; also zunächst den Zusammenhang unter dem Differentiale des Bogens, dem Winkel (w) und dem Differentiale der Ordinate oder dem der Abscisse zu bestimmen.

Setzt man zu diesem Zwecke cd als das Differential des Bogens, so würde ce das der Abscisse, de das der Ordinate sein. cd ist bekanntlich in diesem Falle als eine unendlich kleine Gerade, d. h. der Größe seiner Sehne unendlich sich nähernd, anzusehen, so als ob die Tangente ck zugleich den Punkt d mit berühre, d. h. so, daß die Richtungslinie md sich unendlich dem Zusammenfallen mit kc nähere. Dann nähert sich $\angle$ mdg, der die Drehungsgröße des Bogens ad oder s + ds ausdrückt, unendlich dem Winkel cde (cd nun als unendlich kleine Gerade gedacht) oder dem ihm gleichen $\angle$ kcf. Sobald also cd als Element des Bogens oder als Differential desselben gedacht wird, ist cde einem rechtwinkligen Dreiecke gleich zu setzen, dessen Hypotenuse cd = ds, dessen beide Katheten ce = dx, de = dy und dessen $\angle$ cde = $\angle$ kcf = w ist. Folglich hat man die Abhängigkeiten:

$$(1) \quad \frac{dy}{ds} = \cos. w,$$

$$(2) \quad \frac{dx}{ds} = \sin. w.$$

Oder in anderer Ausdrucksweise:

$$(3) \quad dy = ds \,.\, \cos. w,$$

$$(4) \quad dx = ds \,.\, \sin. w.$$

§. 75.

Der Gebrauch dieser Gleichungen zur Rectification ergiebt sich von selbst.

1. Soll die Bogenlänge durch die Ordinate ausgedrückt werden, so berechnet man aus der gegebenen ursprünglichen Gleichung der zu rectificirenden Curve entweder w oder cos. w, je nachdem das eine oder das andere bequemer ist, und schiebt den gefundenen Werth in die erste Rectificationsformel $dy = ds \,.\, \cos. w$ ein, wodurch man eine Differential-Gleichung zwischen y und s erhält. Nach der Integration derselben erscheint y durch s ausgedrückt. Man darf diese Gleichung nur (algebraisch) umwandeln, um s durch y ausgedrückt zu erhalten.

2. Verlangt man die Relation der Bogenlänge und der Abscisse, so schiebt man in die zweite Rec-

tificationsformel $dx = ds . \sin. w$ entweder den Werth für w oder den für $\sin. w$ ein, nachdem man einen derselben aus der ursprünglichen Gleichung der Krummen berechnet hat, und verfährt übrigens wie unter 1.

§. 76.

Beispiel. Die Krumme zu rectificiren, deren ursprüngliche Gleichung ist

$$s = a (1 + \text{tg.}^2 w)^{\frac{3}{2}} - a.$$

Man berechne aus der gegebenen Gleichung zuerst $\cos. w$; zu diesem Zwecke ist in die Gleichung für $\text{tg.} w$ einzuführen $\cos. w$. Es ist nach einem trigonometrischen Satze

$$\cos. w = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tg.}^2 w)}}, \text{ daher } \sqrt{(1+\text{tg.}^2 w)} = \frac{1}{\cos. w}.$$

Durch Einschiebung des letzteren Werthes in die gegebene Gleichung entsteht

$$s = a \left(\frac{1}{\cos. w}\right)^3 - a$$

$$\cos. w = \sqrt[3]{\frac{a}{s+a}}$$

Setzt man diesen Werth für $\cos. w$ in die Rectificationsformel (3) ein, so erhält man

$$dy = \left(\frac{a}{s+a}\right)^{\frac{1}{3}} ds.$$

Um zu integriren gebe man dem Ausdrucke rechts die Form $\sqrt[3]{a}\,(s+a)^{-\frac{1}{3}}ds$ und setze darin $s+a=v$, also $ds=dv$, so geht hervor

$\sqrt[3]{a}\,.\,v^{-\frac{1}{3}}dv=dy$, und durch Integration

$$\sqrt[3]{a}\,.\,\tfrac{3}{2}\,v^{\frac{2}{3}}+C=y$$

$$\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a}\,(s+a)^{\frac{2}{3}}+C=y.$$

Die Constante zu finden dient die Bemerkung, daß in der ursprünglichen Gleichung für $s=0$ auch $w=0$; daher ist, weil $\cos.0=1$, aus Gleichung (3) $dy=ds$ oder $y=s$, also für $s=0$, auch $y=0$. Setzt man diese Werthe für s und y in der gefundenen Gleichung, so entsteht

$$0=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a}\,(a)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$-\tfrac{3}{2}a=C.$$

Daher die gesuchte vollständige Gleichung

$$\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a}\,(s+a)^{\frac{2}{3}}-\tfrac{3}{2}a=y.$$

Sie bedarf nur noch der algebraischen Umwandlung, welche ergiebt

$$\frac{(\frac{2}{3}y+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}-a=a\left(1+\frac{2y}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}-a=s,$$

wodurch die Aufgabe gelöſ't ist.

Anmerk. Setzt man in diesem Ausdrucke $a=\frac{8}{27}p$, so entsteht die Rectificationsformel

$$s = \frac{9y+4p}{27}\sqrt{\frac{9y+4p}{p}} - \frac{8}{27}p,$$

wodurch sich die Curve als die Neil'sche Parabel zu erkennen giebt. Weiter unten bestätigt sich dieses noch auf eine andere Weise.

§. 77.

Ist zum Behufe der Rectification außer der ursprünglichen Gleichung auch die Gl. für rechtwinklige Coordinaten gegeben, so ist die Rectification durch bloße Differentiation der Coordinaten-Gleichung und eine Einschiebung zu bewerkstelligen. Die Bequemlichkeit und Schicklichkeit der Anwendung hängt jedoch von der Eigenthümlichkeit des besonderen Falles ab. Die beständigen Größen der beiden gegebenen Gleichungen müssen sich entsprechen, welches gewöhnlich schon von selbst Statt findet, da meistentheils aus einer von den Gleichungen die andere wird hergeleitet worden sein.

Das Verfahren ist dieses. Man berechnet aus der Coordinaten-Gleichung das Differential-Verhältniß $\frac{dx}{dy}$. Dieses ist einerlei mit tg. w. (Denn in Fig. 38 ist im Dreiecke cde, $\frac{ce}{de} =$ tg. cde = tg. w). Man schiebt den Werth des Differential-

Verhältnisses, sei er durch x oder durch y ausgedrückt, statt tg. w in die ursprüngliche Gleichung.

Beispiel. Die Coordinaten-Gleichung der Neil'schen Parabel $y^3 = px^2$, (wo $p = \frac{27}{8}a$ der ursprünglichen Gleichung) giebt durch Differentiirung

$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{p}} = tg.w.$ Also $tg.^2 w = \frac{9y}{4p} = \frac{2y}{3a}$.

Durch Einschiebung dieses Werthes in die ursprüngliche Gleichung entsteht

$$s = a\left(1 + \frac{2y}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} - a,$$

wie oben.

§. 78.

Aus dem §. 75 gezeigten Verfahren geht durch bloße Umkehrung desselben die Methode hervor, aus der Rectification einer Krummen diese selbst (d. h. ihre ursprüngliche Gleichung, und daraus, wenn man will, ihre Coordinaten-Gleichung) zu bestimmen. Man differentiirt die Rectification (nachdem man darin y oder x durch s ausgedrückt, sofern dies bequemer sein sollte als die nachherige Einschiebung des nach Anleitung der gegebenen Gleichung zu bestimmenden durch s auszudrückenden Werthes von y oder x), giebt ihr die Form $\frac{dy}{ds} = \varphi(s)$ oder $\frac{dx}{ds} = f(s)$ und setzt (nach §. 75, 1 und 2)

cos. w oder sin. w an die Stelle der Differential-Quotienten.

Beispiel 1. Welche ist die Krumme, deren Rectification ist $y = a . s^2$?

Wegen $dy = 2as . ds$ ist $\frac{dy}{ds} = 2as$ und daher die ursprüngliche Gleichung $2a . s = \cos. w$.

Beispiel 2. Man sucht die ursprüngliche Gleichung der Curve, deren Bogen den Quadraten der Ordinate gleichen.

Die Differentialgleichung der Rectification $ay^2 = s$ giebt $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{as}} = \cos. w$. Oder in anderer Form $4as - 1 = tg^2 w$. Daher für $a = 1$, $\frac{1}{2\sqrt{s}} = \cos. w$, oder auch $4s - 1 = tg.^2 w$.

Beispiel 3. Die Rectification sei $s = \pm\sqrt{(a^2y^2 + y^2)}$, welche ist die Linie? Man findet $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+1)}} = \cos. w$, oder in anderer Gestalt $a = tg. w$. Die Linie ist also die Gerade. Denn man soll dem Winkel irgend einen beständigen Werth geben, dann findet das Verlangte Statt. Der eine Schenkel des Winkels stellt also selbst die gesuchte Linie dar.

Beispiel 4. Giebt es eine Krumme, deren Ordinaten, oder eine, deren Abscissen den Bogen gleichen? — Nein, denn man erhält als Gleichung der einen $\cos. w = 1$, als Gleichung der anderen

$\sin. w = 1$. Diese Linien sind unmöglich, wie man sieht.

Betrachtungen dieser Art sind so leicht als interessant und verlocken zu einer Mannigfaltigkeit von Beispielen. Doch lasse ich es an diesem Orte bei den hergesetzten bewenden, da der Leser ermüden muß, wenn nicht eine weitere Untersuchung dieser absolut rectificablen Curven seinem Interesse neue Anregung giebt.

§. 79.

Aus den in diesem Kapitel angegebenen Methoden gehen noch folgende bemerkenswerthe allgemeine Sätze hervor:

1. Alle Curven von algebraischer ursprünglicher Gleichung haben eine transcendente Rectificationsformel, sind also nicht absolut rectificabel. (§. 75).
2. Alle absolut rectificabeln Curven haben eine transcendente ursprüngliche Gleichung. (§. 78).

Durch weitere Verfolgung der Betrachtungen (§. 78) läßt sich näher bestimmen, welche Formen die ursprünglichen und Coordinaten-Gleichungen haben müssen, wenn die strenge Rectification ihrer Curven möglich sein soll.

Zweites Kapitel.

Ableitung der ursprünglichen Gleichung aus der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

§. 80.

Die Aufgabe, aus der ursprünglichen Gleichung die Gleichung für Coordinatensysteme zu entwickeln, d. h. das Gesetz der Flächenbildung aufzufinden, ist eine wesentliche, die Eigenschaft aber, welche ihre Lösung ergiebt, eine relative. Denn diese Eigenschaft sagt eine Abhängigkeit aus unter Größenbestimmungen (den Coordinaten), die nicht in dem Begriffe der Curve liegen. Daher gehört diese Aufgabe in diesen Abschnitt.

Im gegenwärtigen Kapitel soll zuerst das in der Ueberschrift bemerkte umgekehrte Problem behandelt werden.

§. 81.

Will man die ursprüngliche Gleichung einer ebenen Linie aus deren Gleichung für rechtwinklige Coordinaten finden, so differentiire man diese und be-

rechne aus der Differential-Gleichung $\frac{dx}{dy}$. Der Werth dieses Verhältnisses, der entweder durch y oder durch x ausgedrückt erscheint, gleicht tg. w. Man setze diese Gleichung und berechne aus ihr die darin vorkommende Coordinate, sei es y oder x, worauf man wieder differentiirt, und dadurch entweder dy oder dx durch w und dw ausgedrückt erhält. Diese Function von w wird alsdann dem Werthe von dy oder dx, der im vorigen Kapitel (§. 74, 3 und 4) gefunden wurde, nämlich ds . cos. w oder ds . sin. w gleichgesetzt, wodurch man eine Differential-Gleichung unter w und s bekommt. Die Integration derselben liefert die geforderte Gleichung.

§. 82.

Beispiel 1. Des Kreises Coordinaten-Gleichung aus dem Scheitel ist $y^2 = 2rx - x^2$. Aus ihrer Differential-Gleichung findet man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r-x};$$

daher

$$\frac{2rx - x^2}{(r-x)^2} = tg.^2 w,$$

$$-\frac{r^2 \, tg.^2 w}{1 + tg.^2 w} = x^2 - 2rx.$$

Aber $\frac{tg.^2 w}{1+tg.^2 w} = \sin.^2 w$, daher durch Einschiebung und durch Zuzählung von r^2

$$r^2 (1 - \sin.^2 w) = x^2 - 2rx + r^2.$$

Da $1 - \sin.^2 w = \cos.^2 w$, so erhält man hieraus

$r \pm r . \cos. w = x$, und durch Differentiation

$\mp r . \sin. w . dw = dx.$

Nun ist nach (§. 74, 4) $ds . \sin. w = dx$, also

$$\mp r . \sin. w . dw = \sin. w . ds,$$

$$\mp rdw = ds; \text{ integrirt}$$

$$\mp rw = s.$$

Dasselbe Ergebniß entwickelt sich etwas leichter, wenn man das anfängliche Differential-Verhältniß statt durch x durch y ausdrückt. Die Rechnung steht so:

Aus der gegebenen Gl. ist $x = r \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$, daher nach geschehener Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = tg. w,$$

$$y^2 = \frac{r^2 tg.^2 w}{1 + tg.^2 w},$$

$$-y = \pm r . \frac{tg. w}{\sqrt{(1 + tg.^2 w)}},$$

$$y = \mp r . \sin. w,$$

$$dy = \mp r . \cos. w . dw.$$

Daher wegen (§. 74, 3)

$$\mp r \cos. w \, dw = ds . \cos. w$$

$$\mp rw = s.$$

Die Constante findet sich hier sowohl als bei der ersten Berechnung $= 0$. Das Ergebniß liefert also (wie es denn sein muß) die ursprüngliche Kreisgleichung in der einfachsten Form.

§. 83.

Beispiel 2. Aus der Coordinaten-Gleichung der Neil'schen Parabel ihre ursprüngliche Gleichung abzuleiten.

Der gegebenen Gleichung $y^3 = px^2$ Differentialgleichung ist $\frac{3}{2\sqrt{p}} . y^{\frac{1}{2}} dy = dx$; also, wenn man Kürze halber $\frac{3}{2\sqrt{p}} = n$ setzt,

$$n . \sqrt{y} = \frac{dx}{dy} = tg. w$$

$$y = \frac{tg.^2 w}{n^2}.$$

Um zu differentiiren setze man $tg. w = v$, so ist

$$dy = \frac{2v}{n^2} dv.$$

Da nun $dv = d \, tg. w = \frac{dw}{\cos.^2 w}$, so haben wir, wenn für v dessen Werth wieder eingesetzt wird,

$$dy = \frac{2\,tg.\,w}{n^2 \cos.^2 w} dw.$$

Daraus und aus (§. 74, 3) folgt die Differentialgleichung

$$ds = \frac{2\,tg.\,w}{n^2 . \cos.^3 w} dw.$$

Um zu integriren kann man sich des Satzes bedienen

$$\int \frac{dw \sin.^p w}{\cos.^q w} = \frac{1}{q-1} \frac{\sin.^{p+1} w}{\cos.^{q-1} w}$$
$$- \frac{p-q+2}{q-1} \int \frac{dw \sin.^p w}{\cos.^{q-2} w}.$$

Man wechselt zu diesem Zwecke tg. w der Gleichung mit $\frac{\sin.\,w}{\cos.\,w}$ aus, und erhält darauf durch die Integrirung

$$s = \frac{2}{3n^2}\left[\frac{1}{\cos.^3 w}\right] + C,$$

oder, für n den Werth eingeschoben,

$$s = \frac{\frac{8}{27}p}{\cos.^3 w} + C.$$

Da nun wegen $y = \frac{tg.^2 w}{n^2}$ für $w = 0$ auch $y = 0$, so findet sich aus $dy = ds \cos.\,w$ (§. 74, 3) durch Einschiebung dieser Werthe, für $w = 0$ auch $s = 0$, indem $\cos. 0 = 1$. Daher

$$0 = \frac{\frac{8}{27}p}{\cos.^3 .0} + C,$$

$$- \tfrac{8}{27} p = C,$$

woraus als ursprüngliche Gleichung der Neil'schen Parabel, wenn zugleich $\frac{8}{27}p = a$ gesetzt wird, folgt

$$s = \frac{a}{\cos.^3 w} - a.$$

§. 84.

Beispiel 3. Die ursprüngliche Gleichung der apollonischen Parabel aus ihrer Coordinaten-Gleichung herzuleiten.

Ist die Gleichung für ein schiefwinkliges Coordinatensystem gegeben, so berechnet man sie daraus zuvor für das rechtwinklige. Dieses wird hier, wie schon früher stillschweigend, vorausgesetzt.

Aus der gegebenen Gleichung $y^2 = px$ entsteht, wenn man differentiirt,

$$\frac{2}{p} \cdot y = \frac{dx}{dy} = \text{tg.}\, w, \text{ daher}$$

$$y = \frac{p}{2} \text{tg.}\, w,$$

woraus man durch Differentiation erhält

$$dy = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos.^2 w}.$$

Nun ist nach (§. 74, 3) $dy = ds \,.\, \cos.\, w$; demnach

$$ds = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos.^3 w}.$$

Die Integration wird am bequemsten durch die Formel vermittelt:

$$\int \frac{dw}{\cos.^q w} = \frac{\sin. w}{(q-1)\cos.^{q-1} w} + \frac{q-2}{q-1} \int \frac{dw}{\cos.^{q-2} w}.$$

Dadurch erhält man

$$s = \frac{p}{2}\left[\frac{\sin. w}{2.\cos.^2 w} + \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\cos. w}\right],$$

und weil $\int \frac{dw}{\cos. w} = \log. nat. tang. (45^\circ + \frac{1}{2} w)$

$$s = \frac{p}{4}\left[\frac{tg. w}{\cos. w} + \log. nat. tang. (45^\circ + \frac{1}{2} w)\right] + C$$

oder auch, da $\frac{1}{\cos. w} = \sec. w$, und, nach einem goniometrischen Satze, $tg. (45^\circ + \frac{1}{2} w) = tg. w + \sec. w$,

$$s = \frac{p}{4}[tg. w . \sec. w + \log. nat. (tg. w + \sec. w)] + C.$$

Da für $w = 0$ auch $s = 0$, wie man leicht findet, so ist, weil $tg. 0 = 0$ und $\sec. 0 = 1$,

$$0 = \frac{p}{4}(0 + \log. nat. 1) + C.$$

Aber auch $\log. nat. 1 = 0$, daher $C = 0$. Demnach ist

$$s = \frac{p}{4}[tg. w . \sec. w + \log. nat. (tg. w + \sec. w)]$$

die vollständige ursprüngliche Gleichung für die gemeine Parabel.

Drittes Kapitel.

Ableitung der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten aus der ursprünglichen Gleichung.

§. 85.

Es sind hier zwei verschiedene Methoden anwendbar.

1. Die erste ist das umgekehrte Verfahren des vorigen Kapitels. Man differentiire die gegebene ursprüngliche Gleichung und berechne daraus den Werth von $ds . \sin. w$, um ihn $= dx$ zu setzen, oder den Werth von $ds . \cos. w$, um ihn dy gleich zu stellen. Die hervorgegangene Differentialgleichung wird integrirt, wobei die sofortige Hinzufügung der Constante nicht versäumt werden darf. Durch die so entstandene Gleichung ist die Abhängigkeit unter w und x oder unter w und y gegeben. Man berechnet daraus den Werth von $tg. w$ und setzt ihn $= \frac{dx}{dy}$, oder man leitet daraus den Werth einer andern brauchbaren Function von w ab

und setzt ihn dem aus tg. $w = \frac{dx}{dy}$ folgenden Werthe derselben Function gleich. Daraus geht eine Differentialgleichung hervor, deren Integration die geforderte Gleichung liefert.

Es läßt sich noch eine kleine Abänderung in diesem Verfahren treffen, die zuweilen bequem ist. Nachdem nämlich eine der Gleichungen zwischen w und x oder w und y gefunden ist, stellt man daraus cos. w oder sin. w dar. Der Werth davon wird $= \frac{dy}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$ (im Falle cos. w berechnet wurde), hingegen $= \frac{dx}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$ (im anderen Falle) gesetzt, und die so gebildete Differentialgleichung integrirt.

Weil nämlich, wie bekannt, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, so hat man aus $dy = ds . \cos. w$ durch Einschiebung des Werthes von ds

$$\cos. w = \frac{dy}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$$

und ebenso aus $dx = ds . \sin. w$

$$\sin. w = \frac{dx}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}.$$

2. Ein zweites nicht selten mit Vortheil anzuwendendes Verfahren besteht darin, daß man zuerst auf die oben (unter 1) angegebene Weise beide Gleichungen, sowohl die zwischen w und x als

die zwischen w und y sucht, und durch Ableitung von w oder einer und derselben Function von w aus beiden Gleichungen eine Gleichung zwischen x und y zu Stande bringt.

Diese Ableitungsart, nur unbedeutend modificirt, kann auch so dargestellt werden:

Man schiebt in die Gleichungen

$$dy = ds \,.\, \cos.\, w$$
$$dx = ds \,.\, \sin.\, w$$

für ds den aus der Differential-Gleichung der Gegebenen erhaltenen Werth ein, integrirt und berechnet aus beiden Integralgleichungen eine und dieselbe Function von w, deren Werthe einander gleich gesetzt werden.

§. 86.

Beispiel 1. Aus der ursprünglichen Gleichung des Kreises dessen Coordinatengleichung zu finden.

Erste Methode. Aus $rw = s$ ist $rdw = ds$, daher $r \,.\, \sin.\, w\, dw = ds \,.\, \sin.\, w$. Dies letztere gleicht dx, daher

$$r \,.\, \sin.\, w\, dw = dx; \text{ integrirt}$$
$$- r \cos.\, w + C = x.$$

Da nun in der gegebenen Gleichung für $s=0$ auch $w=0$, so ist wegen $dx=ds.\sin. w$ für $w=0$ auch $x=0$. Die Einschiebung dieser beiden Werthe in die Integralgleichung ergiebt

$$-r.1+C=0$$

$$C=r;\ \text{also}$$

$$r-r\cos. w=x$$

$$\cos. w=\frac{r-x}{r}$$

$$\frac{1}{1+tg.^2 w}=\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$$

$$\frac{(dy)^2}{(dy)^2+(dx)^2}=\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$$

$$dy=\frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}dx;\ \text{integrirt}$$

$$y=\sqrt{(2rx-x^2)};$$

die Constante ist 0.

Zweite Methode. Um zuerst die Gleichung zwischen w und y zu finden setze man in Folge von $rdw=ds$

$$r.\cos. w\,dw=ds.\cos. w;$$

$$ds.\cos. w=dy$$

$$r.\cos. w\,dw=dy;\ \text{integrirt}$$

$$r.\sin w=y.$$

Die Constante ergiebt sich $=0$, wegen $\sin.0=0$. Aus der Integralgleichung folgt

$$\sin.^2 w = \frac{y^2}{r^2}.$$

Die Gleichung zwischen w und x ist schon bei der Berechnung nach der ersten Methode aufgestellt, sie hieß $\cos. w = \frac{r-x}{r}$, woraus

$$\cos.^2 w = \left(\frac{r-x}{r}\right)^2.$$

Da nun $\sin.^2 w + \cos.^2 w = 1$, so folgt

$$\frac{y^2}{r^2} + \left(\frac{r-x}{r}\right)^2 = 1$$

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

als die rechtwinklige Coordinaten-Gleichung des Kreises aus dem Scheitel.

§. 87.

Beispiel 2. Welche Coordinatengleichung hat die Curve, deren Begriff in der Gleichung $s = \frac{a}{\cos.^3 w} - a$ gegeben ist?

Wir wollen zu dieser Untersuchung die zweite Methode brauchen.

$$dy = ds . \cos. w,$$

daher, wenn man für s den Werth aus der Gegebenen einschiebt,

$$dy = d\left[\frac{a}{\cos.^3 w} - a\right].\cos. w.$$

Um $\frac{a}{\cos.^3 w} - a$ zu differentiiren, setze man $\cos. w = z$, woraus $-\sin. w\, dw = dz$. Es ist nun $d\left(\frac{a}{z^3} - a\right)$ $= -3az^{-4}\,dz = -\left(\frac{3a}{\cos.^4 w}\right)(-\sin. w\, dw)$ $= \frac{3a.\sin. w}{\cos.^4 w} dw$. Daher

$$dy = \frac{3a.\sin. w}{\cos.^3 w} dw; \text{ integrirt}$$

$$(1)\quad y = 3a\left(\tfrac{1}{2}\frac{\sin.^2 w}{\cos.^2 w}\right) = \tfrac{3}{2} a\,\mathrm{tg.}^2 w.$$

Dieses Integral ergiebt sich sofort nach der §. 83 angeführten Integrationsformel. Da für $w = 0$, $s = 0$, so ist auch für $w = 0$, $y = 0$. Daraus geht die Constante $= 0$ hervor.

Ferner ist zu dem beabsichtigten Zwecke der Satz

$$dx = ds.\sin. w$$

auf ähnliche Weise zu behandeln. Nach der Einschiebung des Werthes von s hat man durch Differentiirung dieses Werthes

$$dx = \frac{3a.\sin.^2 w}{\cos.^4 w} dw,$$

woraus die Integralgleichung hervorgeht

$$(2)\quad x = 3a\left(\tfrac{1}{3}\frac{\sin.^3 w}{\cos.^3 w}\right) = a\,\mathrm{tg.}^3 w.$$

Auch hier ist die Constante $= 0$.

Aus (1) entsteht durch algebraische Umwandlung

$$\sqrt[2]{\frac{2y}{3a}} = \operatorname{tg.} w,$$

aus (2) desgleichen $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \operatorname{tg.} w$;

daher

$$\sqrt[2]{\frac{2y}{3a}} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$$

$$y^3 = \tfrac{27}{8}\, a \,.\, x^2,$$

oder, $a = \frac{8}{27} p$ gesetzt (vergl. §. 83),

$$y^3 = px^2.$$

§. 88.

Beispiel 3. Die ursprüngliche Gleichung einer Curve ist $2as = \cos. w$, man sucht ihre Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

I. Die Differentiation der Gegebenen ergiebt

$$(1) \quad ds = -\frac{1}{2a} \sin. w\, dw.$$

Durch Einschiebung dieses Werthes von ds in

$$(2) \quad dy = ds \,.\, \cos. w \text{ entsteht}$$

$$dy = -\frac{1}{2a} \sin. w \,.\, \cos. w\, dw.$$

Die Integration dieser Gleichung nach dem Satze

$$\int \sin. w \,.\, \cos.^n w\, dw = -\frac{1}{n+1} \cos.^{n+1} w$$

liefert das Integral

$$(3) \quad y = \frac{1}{4a} \cdot \cos.^2 w + C.$$

Für $w = 0$ ist aus der Gegebenen $s = \frac{1}{2a}$; ferner ist für $w = 0$ aus (2) $y = s = \frac{1}{2a}$. Durch Einschiebung dieser Werthe von w und y in (3) erhält man

$$C = \frac{1}{4a},$$

daher das vollständige Integral

$$y = \frac{\cos.^2 w + 1}{4a}.$$

Daraus ist

$$(4) \quad \sqrt{4ay - 1} = \cos. w,$$

$$(5) \quad \sqrt{2 - 4ay} = \sin. w,$$

$$(6) \quad \text{Arc. cos.} \sqrt{4ay - 1} = w.$$

II. Setzt man den in (1) für (ds) gefundenen Werth ein in

$$(7) \quad dx = ds . \sin. w,$$

so geht hervor

$$dx = -\frac{1}{2a} \cdot \sin.^2 w\, dw.$$

Durch Anwendung der Integrationsformel

$$\int \sin.^m w . dw = -\frac{\cos. w . \sin.^{m-1} w}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin.^{m-2} w . dw$$

folgt hieraus die Integralgleichung

$$x = \frac{\cos. w . \sin. w - w}{4a} + C.$$

Für $w = 0$ ist wegen $\sin. 0 = 0$ aus (7) auch $x = 0$, daher $C = 0$, demnach das vollständige Integral

$$x = \frac{\cos. w . \sin. w - w}{4a}.$$

Hieraus entsteht, wenn man für cos. w, sin. w und w die unter (4), (5) und (6) berechneten Werthe einschiebt

$$(8) \quad x = \frac{\pm\sqrt{(4ay-1)(2-4ay)} - \text{Arc.} \cos. \sqrt{4ay-1}}{4a}$$

als die geforderte Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

Anmerk. Um diese Curve aus der ursprünglichen Gleichung zu rectificiren schiebt man aus letzterer den Werth von cos. w ein in (2) und erhält

$dy = 2as . ds$, woraus durch Integration

$$(9) \qquad y = as^2 + C.$$

Für $w = 0$ ergiebt sich aus $2as = \cos. w$, $s = \frac{1}{2a}$ und aus (2) $y = s$, daher durch Einschiebung dieser Werthe von y und s in (9)

$$C = \frac{1}{4a}.$$

Also die vollständige Rectification

$$y = as^2 + \frac{1}{4a}.$$

Berechnet man aus dieser Formel, oder auch nur aus der $y = as^2$ wiederum die ursprüngliche Gleichung, so ist sie für beide Fälle

$$2as = \cos. w.$$

Vergl. §. 78, Beispiel 1.

Die durch die Coordinaten-Gleichung (8) gegebene Curve hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß ihre Bogen sich wie die Quadratwurzeln aus den Ordinaten verhalten.

Schlußbetrachtungen.

Vergleicht man die Coordinaten-Methode mit der neuen, so scheint es auf den ersten Blick, als ob sie wegen ihrer großen Verschiedenheit immer fremdartig einander gegenüber stehen, und, in ungenügender Zweiheit beharrend, der Entwickelung eines wissenschaftlichen Organismus der höheren Geometrie, dessen erste formale Bedingung Einheit ist, hemmend in den Weg treten müßten. Aber eine nähere Betrachtung zeigt gleich, daß es umgekehrt ist, und die ursprüngliche Weise, die Curven zu behandeln, auf ein förmliches System der sämmtlichen analytischen Methoden führt, nach denen Linie, Fläche und Körper untersucht werden können.

Jede Methode, die im Systeme auftreten soll, muß an ihrem Orte, also in eigenthümlicher Beziehung, eine ursprüngliche sein. Sie ließe sich sonst nicht als nothwendig deduciren, und fiele durch ihre

und setzt ihn dem aus tg. w $= \frac{dx}{dy}$ folgenden Werthe derselben Function gleich. Daraus geht eine Differentialgleichung hervor, deren Integration die geforderte Gleichung liefert.

Es läßt sich noch eine kleine Abänderung in diesem Verfahren treffen, die zuweilen bequem ist. Nachdem nämlich eine der Gleichungen zwischen w und x oder w und y gefunden ist, stellt man daraus cos. w oder sin. w dar. Der Werth davon wird $= \frac{dy}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$ (im Falle cos. w berechnet wurde), hingegen $= \frac{dx}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$ (im anderen Falle) gesetzt, und die so gebildete Differentialgleichung integrirt.

Weil nämlich, wie bekannt, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, so hat man aus $dy = ds . \cos. w$ durch Einschiebung des Werthes von ds

$$\cos. w = \frac{dy}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$$

und ebenso aus $dx = ds . \sin. w$

$$\sin. w = \frac{dx}{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}.$$

2. Ein zweites nicht selten mit Vortheil anzuwendendes Verfahren besteht darin, daß man zuerst auf die oben (unter 1) angegebene Weise beide Gleichungen, sowohl die zwischen w und x als

die zwischen w und y sucht, und durch Ableitung von w oder einer und derselben Function von w aus beiden Gleichungen eine Gleichung zwischen x und y zu Stande bringt.

Diese Ableitungsart, nur unbedeutend modificirt, kann auch so dargestellt werden:

Man schiebt in die Gleichungen

$$dy = ds \, . \cos . w$$
$$dx = ds \, . \sin . w$$

für ds den aus der Differential-Gleichung der Gegebenen erhaltenen Werth ein, integrirt und berechnet aus beiden Integralgleichungen eine und dieselbe Function von w, deren Werthe einander gleich gesetzt werden.

§. 86.

Beispiel 1. Aus der ursprünglichen Gleichung des Kreises dessen Coordinatengleichung zu finden.

Erste Methode. Aus $rw = s$ ist $rdw = ds$, daher $r . \sin . w \, dw = ds . \sin . w$. Dies letztere gleicht dx, daher

$$r . \sin . w \, dw = dx; \text{ integrirt}$$
$$- r \cos . w + C = x.$$

Da nun in der gegebenen Gleichung für $s=0$ auch $w=0$, so ist wegen $dx=ds.\sin.w$ für $w=0$ auch $x=0$. Die Einschiebung dieser beiden Werthe in die Integralgleichung ergiebt

$$-r.1+C=0$$

$$C=r;\text{ also}$$

$$r-r\cos.w=x$$

$$\cos.w=\frac{r-x}{r}$$

$$\frac{1}{1+tg.^2 w}=\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$$

$$\frac{(dy)^2}{(dy)^2+(dx)^2}=\left(\frac{r-x}{r}\right)^2$$

$$dy=\frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}dx;\text{ integrirt}$$

$$y=\sqrt{(2rx-x^2)};$$

die Constante ist 0.

Zweite Methode. Um zuerst die Gleichung zwischen w und y zu finden setze man in Folge von $rdw=ds$

$$r.\cos.w\,dw=ds.\cos.w;$$

$$ds.\cos.w=dy$$

$$r.\cos.w\,dw=dy;\text{ integrirt}$$

$$r.\sin w=y.$$

Die Constante ergiebt sich $=0$, wegen $\sin.0=0$. Aus der Integralgleichung folgt

$$\sin.^2 w = \frac{y^2}{r^2}.$$

Die Gleichung zwischen w und x ist schon bei der Berechnung nach der ersten Methode aufgestellt, sie hieß $\cos. w = \frac{r-x}{r}$, woraus

$$\cos.^2 w = \left(\frac{r-x}{r}\right)^2.$$

Da nun $\sin.^2 w + \cos.^2 w = 1$, so folgt

$$\frac{y^2}{r^2} + \left(\frac{r-x}{r}\right)^2 = 1$$

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

als die rechtwinklige Coordinaten-Gleichung des Kreises aus dem Scheitel.

§. 87.

Beispiel 2. Welche Coordinatengleichung hat die Curve, deren Begriff in der Gleichung $s = \frac{a}{\cos.^3 w} - a$ gegeben ist?

Wir wollen zu dieser Untersuchung die zweite Methode brauchen.

$$dy = ds . \cos. w,$$

daher, wenn man für s den Werth aus der Gegebenen einschiebt,

auf ebene Curven weiter entwickele, darauf der doppelt gekrümmten Linien sich bemächtige u. s. w. — Die eingeschlossene Fläche mit ihrer Gleichung sieht sie als relative Eigenschaft der Linie an, und leitet wie im sechsten Abschnitte die Coordinaten-Gleichung ab, um dadurch einen Uebergang zu den gesetzmäßig begrenzten Flächen zu bilden. Darauf aber sind diese nach ihrer eigenthümlichen Weise, und, wie gewöhnlich, in Rücksicht auf alle ihre Dimensionsbeziehungen zu behandeln.

Indem ich von dem Leser Abschied nehme, sei mir noch die Aeußerung des Wunsches erlaubt, daß das dargestellte Verfahren mit Veranlassung geben möchte zu der Erzeugung und Behandlung einer größeren Mannigfaltigkeit von geometrischen Formen, als bisher. Zwar liegt ein großer Vortheil darin, wenn man, wie es gemeiniglich geschieht, in die Untersuchung einzelner Gestaltungen so tief als möglich eingeht; aber bei so großer Armuth an geometrischen Objecten entsteht eine gewisse Erstarrung des geometrischen Geistes in der analytischen Umhüllung, und die Gewandtheit in der Auffassung der begrifflichen und anschaulichen Raum-Vorstellungen so wie in deren rascher Handhabung wird allzuwenig befördert. Die analytische Geometrie ist

noch zu schwerfällig und muß allmählig mit größerer Leichtigkeit und Kürze ihre Gegenstände beherrschen lernen, wenigstens bis auf eine mäßige Tiefe der Untersuchung. Ein Lehrbuch, das auch nur die absoluten Eigenschaften einer so großen Anzahl sorgfältig geordneter Gattungen und Arten von Linien, Flächen und Körpern ableitete, als es die jetzige Kraft der Analysis irgend zulassen will, wäre als ein bedeutender Gewinn für die Wissenschaft anzusehen. — Unter den neueren Geometern haben wohl Monge, Lardner und Brandes die verhältnißmäßig größte Menge von Formen betrachtet. Plücker's in diesem Jahre erschienenes System der analytischen Geometrie, mit dem ich mich noch nicht habe beschäftigen können, spannt auch in dieser Rücksicht die Erwartung und läßt überhaupt eine ausgezeichnete Leistung vermuthen.

Dresden,
gedruckt in der Buchdruckerei von Ernst Blochmann.

